现代应用数学丛书

塑性论

〔日〕鷲津久一郎 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

塑　性　論

〔日〕鷲津久一郎 著
刘　亦　珩　譯

上海科學技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共七章，第1章緒論，介紹簡单拉伸的应力应变曲綫；第2章概述了彈性理論及其与塑性理論的异同点，作为討論塑性問題的准备；从第3章开始到第7章都是以书末文献〔9〕〔10〕〔11〕为典范，着重作应用数学的处理。书末另附 Green 定理和特征曲綫等两篇作为附录，同时附有十六种文献以供讀者参考。本书可供高等学校数学系和物理、力学专业的师生及工程师作参考。

現代应用数学丛书

塑 性 論

原书名 塑 性 論
原著者 〔日〕鷲津久一郎
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 刘 亦 珩

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 2 8/32 字数 51,000
1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷
印数 1—2[illegible],000

統一书号：13119・428
定 价：（十四）0.40元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

这本小册子是岩波应用数学丛书內有关力学方面的七种著作之一。这七种著作差不多都是在力求使用統一的几何学方法的基础上写成的。所謂統一的几何学方法，乃是以近藤一夫为首的20多位日本工程学者及应用数学者自1951年以来共同研究的方向。他們的研究成果曾經汇集出版，叫作"工学基础問題的几何学統一的研究"，以后簡称为"汇編"。其中所处理的工学問題范圍很广，有电路网絡、工学力学系統(特別是轉动电机)、彈性塑性、流体力学以及其他方面的一些問題。其主要精神是以 Gabriel Kron 对于轉动电机分析所提出的思想为基础，进一步推广到对轉动流体机、航空机以及其他近代工业机器的分析。找出这些机器所形成的力学系統，作出它的表現空間，将状态的变化看作坐标变换，机器类型的不同当作約束条件，而建立該空間的几何学，这样就将机器分析变成了几何学的研究。又将这种研究方法应用到連續介质力学的基本問題中，将完全无应力状态看作 Lagrange 状态，任意变形状态看作 Euler 状态，于是将連續介质力学看成是在 Euler 坐标变换群下对于几何学的研究。由于 Lagrange 状态是 Riemann 空間的，Euler 状态是 Euclid 空間的，对于所有 Euler 状态都对应着同一个 Lagrange 状态(卽无应力状态)，所以这种几何学是保持 Riemann 度量的空間几何学，当然是一种 Riemann 几何学。因为 Euler 状态是 Euclid 的，所以要求 Riemann 曲率張量为零，将这个条件用不同的形状写出来就得到通常所說的几何方程及协調条件。这样看来，在普通 Euclid 空間內，表面上不相同的两組条件，实质上完全是等同的。而且借此还可以直接处

理非綫性問題及大变形和大变位的問題。 总的說来，这种几何学方法的要点是利用張量算法，通过近代微分几何空間形式的分析来处理力学及工学上的基本問題。

这本小册子也是根据同一观点写成的。因为它是出版在近藤的“变形几何学”及其他小册子之后的，所以基本理論及几何化过程沒有重述，只着重提出“几何方程”就是“协調条件”。这可能使初学者及不习惯于运用 Riemann 几何学思想的讀者引起誤解，所以在閱讀本书时最好参看比它先出版的各种小册子。不过本著以后各章只是用了一些張量記号，并未使用張量算法及 Riemann 几何学，讀起来并不会感到很大困难。本书的材料主要是将 R. Hill 的“塑性的数学理論”里特别是数学的部分加以介紹，对于塑性論的物理概念和实际应用叙述得不多。对塑性論不熟悉的讀者，可以参照初等塑性理論的专书閱讀。这类书籍国內已經出版的不少了。

本书共分七章，前两章是緒論性质的，将彈性理論作了概括的叙述，特别是对彈性和塑性的关系以及二者的异同点作了比較詳細的說明，給第 3 章以后的論述打下了基础。第 3 章介紹塑性論的基础，推导出基本方程。第 4 章解說变分法原理，对利用变分法解决塑性論問題作了較全面的叙述。第 5 章处理塑性平面应变問題，第 6 章极限分析，第 7 章全应变塑性理論等，討論得都比較简单，虽然也涉及到一些实际問題，但語焉不詳。

苏联学者在这方面有着很多貢献，但本书很少提到。苏联学者所著的塑性理論专著，在我国已經翻譯出版很多，讀者在学习时可以尽量多加参閱，以补书中之缺。

最后，本譯稿曾經上海交通大学工程力学系李康先同志予以詳細校閱，提出了若干宝貴的意見，特此表示感謝。

刘亦珩 1961年6月于西北大学

序

按照 R. Hill 在《塑性的数学理論》中指出的，塑性論是和彈性論对应的术語，它是塑性变形体特別是金属的应力应变的数学理論的綜称。

在設計构件时，为了使构件能經受給定的荷載，需要解决构件各部材料的尺寸的选取問題。这时，若有不发生永久变形的設計条件，那末只要使各部材料的应力不超过比例极限或屈服应力就成了，而且在它的分析里也只需要用到彈性理論。但若有在靜荷載下不发生破坏断裂的設計条件，則其分析就需应用塑性理論了。

至于压延及极曲等塑性加工問題，因其目的是引起永久变形，所以这些內容也是塑性論里所特有的。

本书是估計讀者已經有了一些关于彈性論的預备知識的前提下写的，所以在第 2 章中介紹彈性論时仅略述它的大概，着重于闡明它和第 3 章以后的塑性論的异同点。第 3 章以后将以书末文献 [9]，[10]，[11] 作典范，着重作应用数学的处理。但由于篇幅的限制，对塑性論基础的实驗及物理学的考察沒有介紹，而且对塑性論的应用方面也不得不大加精簡。对这些方面有兴趣的讀者，可以参閱书末的参考文献以及这些文献里所引用的論文。文献[14] 是概述塑性論最近进展的良好資料。

目　　录

第1章 緒　論

§1 簡单拉伸試驗的应力应变曲綫

檢查金属材料变形特性的最簡单的方法是簡单拉伸試驗。我們将先說明它。对图1.1所示的标点距离为 l_0，断面积为 A_0 的金属試件，作用拉伸荷載 P（这叫作加載），則标点距离伸长而断面积縮小。将它們各命为 l 及 A。若在纵軸上取平均应力 $\sigma=P/A$，在横軸上取应变 $\varepsilon=\ln(l/l_0)$ 时❶，随着 P 的增加，σ 和 ε 便描出图1.2形状的应力应变曲綫。这里 ln 是自然对数，且在小变形的范圍里有 $\sigma\approx P/A_0$ 及 $\varepsilon=\ln\{1+(l-l_0)/l_0\}\approx(l-l_0)/l_0$。从图1.2可以看出，在应力适当小的范圍里，$\sigma$ 和 ε 保持綫性关系，除掉荷載时（这叫作卸載）試件就恢复原长 l_0。使 σ 和 ε 的綫性关系成立的应力最大值（图1.2的 P 点）叫作比例极限。在比例极限内恒有 $\sigma=E\varepsilon$，比例常数 E 叫作 Young 模量。这时若同时測定横向应变 δ，就可以知道比数 $-\delta/\varepsilon$ 是一个常数，这个常数用 ν 表示，叫作 Poisson 比。即是，将直棒拉伸时，若将比例极限内的纵向拉伸应变命为 ε，

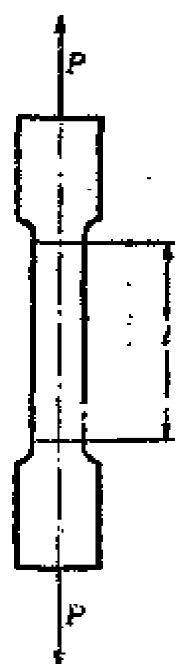


图1.1 簡单拉伸試驗

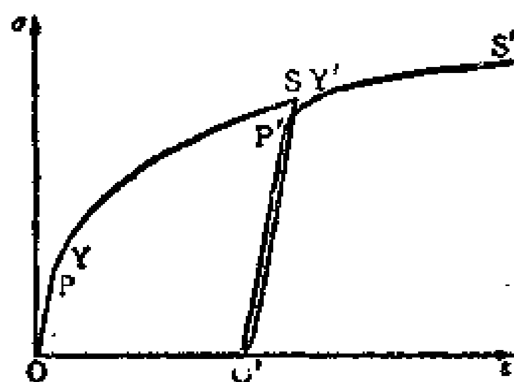


图1.2 应力应变曲綫

---

❶ 注意在第2章以后，σ 将用于另一种意义，参照(4.5)。

则在横向发生收缩应变 $\nu\varepsilon$。屈服应力（图1.2的 Y 点）定义为：当荷载全部去掉后能使試件恢复到原长 l_0 的最大应力。但若作精密測定时，则不論加的荷载怎样小，当使荷载全部卸除时，也必然殘留下和該荷载相当的微小永久应变。所以，习惯上往往把能生成0.2%的永久应变的应力定义为屈服应力。若将荷载恢复到原来的情形时，变形也随之消失而恢复原形，这种性质叫作彈性。与此相反，即使将荷载全部卸掉，也还殘留下永久应变的性质叫作塑性。

对于大多数的金属，若想使塑性变形持續进行时，非增加应力不可，即是在大多数的情形里，σ-ε 曲綫恒有 $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}>0$。这个现象叫作应变强化或者加工硬化。在一般的情形下，为了使試件产生应变增量 $d\varepsilon$ 所需要的应力增量 $d\sigma$，亦即 $d\sigma/d\varepsilon$，恒随 ε 的增加而减少，换言之，应变强化的比例逐漸縮小，而应力应变曲綫逐漸弯曲。經过屈服点以后，σ-ε 曲綫平行于 ε 軸，即 $d\sigma/d\varepsilon=0$，这样的材料叫作理想塑性材料（图1.3）。

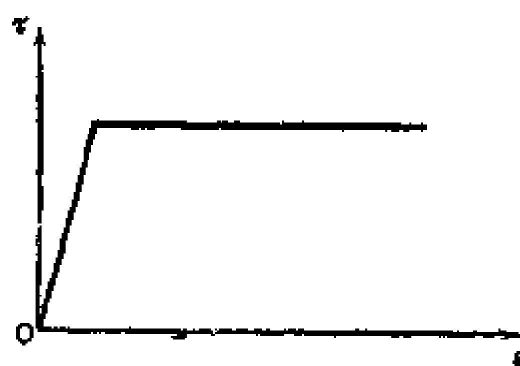


图1.3 理想塑性材料

再回到图1.2。若給与某种程度的塑性变形后使荷载自 S 减少，那末当沿着图的 SO' 使荷载回复到0时，便生成 OO' 的永久应变。在此情形，SO' 几乎平行于 PO。自 O' 再加載，则 σ-ε 曲綫重合于 $O'P'$，在这个范圍里是彈性变形，P' 是具有永久应变 OO' 的材料的新的比例极限。經过 P' 再加上微小塑性应变，使应力接近原来的 S 值时，则曲綫在 Y' 附近剧烈弯曲形成 $Y'S'$，好象是从 YS 延长来的。

为了对于这种材料作数学塑性論的研究，有必要作如下的理

想化(图 1.4)，卽使 P 和 Y 一致。材料到 P 点保持着綫性的应力应变关系和彈性，但 P 是屈服点。又 S, Y', P' 一致，且 SO' 及 $O'P'Y'$ 都和 PO 平行。S 可以看成是受有初始应变 OO' 的試件的屈服应力。若將这种受有初始应变的金属的应力应变曲綫 $O'SS'$ 和完全不受初始应变的金属的应力应变曲綫 OPS 作比較，就可以看出它的屈服应力較高，而且超过屈服应力后曲綫急烈弯曲，具有接近理想塑性材料的特征。

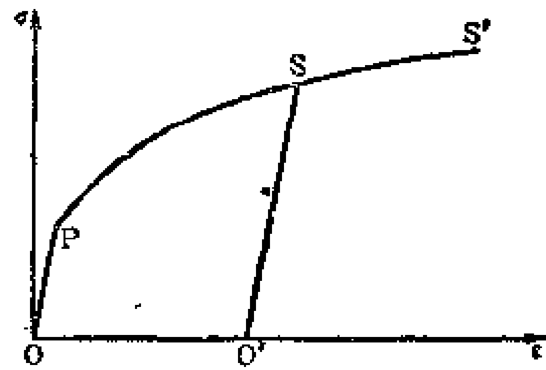


图 1.4 应力应变曲綫的理想化

如上所述，在彈性域里，应力和应变間有一一对应的关系，当指定应力时，則其对应的应变可以由直綫 OP 唯一地决定。但在塑性域里却沒有这样的对应关系，不过只要利用加載和卸載的适当配合，就可达到曲綫 $OPSS'$ 和横軸間的任意点(σ, ε)。在塑性域里应变不仅取决于最終狀态的应力，而且还有賴于加載路綫。因此，塑性論里的应力应变关系比彈性論里的应力应变关系要复杂得多。

以上是对拉伸試驗所作的說明。若再作压縮試驗及扭轉試驗，那末就可以根据它們作成三維塑性論的基础。

本书在叙述塑性論以前，先在第 2 章概述彈性的理論，作为第 8 章进行研討塑性論和彈性論的异同点的資料。但由于篇幅所限，第 2 章的彈性理論只能做到概述的程度。讀者欲知其詳，可以參閱卷末的文献[1]至[8]及它們里边所引用的文献。

第2章 彈性論概述

§2 应变与协調条件

在空間內取直角坐标 x_1, x_2, x_3，命 x_1, x_2, x_3 方向的单位向量各为 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$，命变形前物体內任意一点 P_0 所对应的位置向量是 $\boldsymbol{r}_0$，那末有

$$\boldsymbol{r}_0 = x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{i}_i \tag{2.1}$$

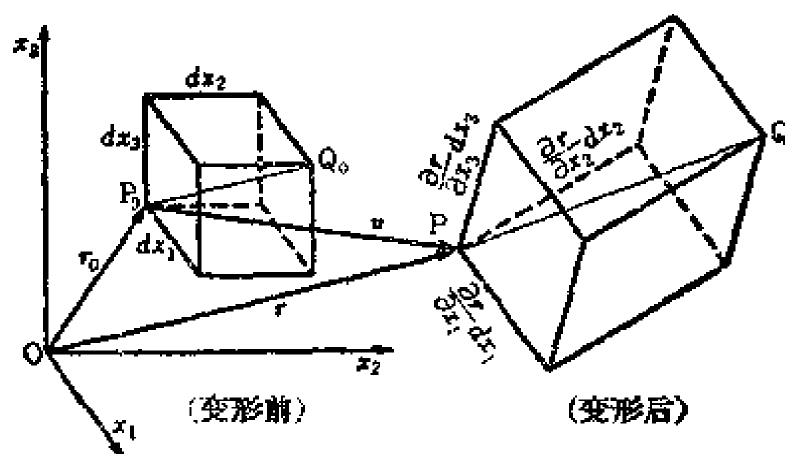


图2.1 变　位

(图 2.1)。今后将 (x_1, x_2, x_3) 叫作物体坐标，卽是指定物体点 P_0 的一种參数。这个物体点和变形前位置在 $(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ 上的点 Q_0 間的距离 P_0Q_0 用公式

$$ds_0^2 = d\boldsymbol{r}_0 \cdot d\boldsymbol{r}_0 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{2.2}$$

表示。这里 δ_{ij} 是 Kronecker 記号，当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；$i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$。

在变形后点 P_0 移到点 P，命其新的位置向量为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3), \tag{2.3}$$

则 P_0Q_0 在变形后的长度 PQ 变为

$$ds^2=d\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\,dx_i dx_j. \tag{2.4}$$

但在这里曾設

$$g_{ij}\equiv\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j}=g_{ji}, \tag{2.5}$$

所以应变張量 e_{ij} 可定义如下：

$$e_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j}-\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x_j}\right)=e_{ji}, \tag{2.6}$$

或者用 g_{ij} 及 δ_{ij} 改写时，则有

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ij}-\delta_{ij})=e_{ji}. \tag{2.7}$$

若命 P_0 点的变位(或位移)向量是 $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$，其分量为 (u_1, u_2, u_3)，則有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{3}(x_i+u_i)\boldsymbol{i}_i, \tag{2.8}$$

于是 e_{ij} 可用变位分量表示为

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)=e_{ji}. \tag{2.9}$$

直到現在，对于变位的大小还未加上任何限制。但在微小变位彈性論里，由于假設变位是微小的，所以在公式(2.9)里仅取变位的一阶項而略去高阶項。而且将微小变位理論里的 e_{ij} 改写为 ε_{ij} 时，則有

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\varepsilon_{ji} \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{2.10}$$

在微小变位理論里，通常用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3，用 u, v, w 代替 u_1, u_2, u_3，用 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 代替 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12}$；亦即

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z=\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx}=\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{array}\right\} \quad (2.11)$$

若想說明应变的几何意义,則 ε_x 是变形前平行于 x 軸的微小綫素在变形后的相对变形，ε_y 及 ε_z 的意义也是这样的。γ_{yz} 則是变形前平行于 y 軸的微小綫素和平行于 z 軸的微小綫素的交角(直角)在变形后的相差角，一般叫作剪应变。γ_{zx}，γ_{xy} 的意义也类此。

ε_x, ε_y, $\cdots$, γ_{xy} 是按照(2.11)用三个量 u, v, w 的导数定义的六个量,所以它們不能相互无关。当任意确定 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\cdots,\gamma_{xy}$ 时，就可以按照(2.11)由单值連續的 u,v,w 导出充要条件,叫作协調条件。按照森口氏的写法，可以将微小变位理論的协調条件写成如下形状[4]：

$$\begin{pmatrix} R_x & U_z & U_y \\ U_z & R_y & U_x \\ U_y & U_x & R_z \end{pmatrix}=0, \qquad (2.12)❶$$

这里有

$$\left.\begin{aligned} R_x&=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}, \\ R_y&=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x}, \\ R_z&=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}, \\ U_x&=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}, \\ U_y&=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}, \\ U_z&=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

❶ (2.12)就是意味着 $R_x=R_y=R_z=U_x=U_y=U_z=0$。

而且曾設所考虑的物体形成一个单連通域。

协調条件的意义可以这样解释：将物体切离成小碎片，然后給各个小碎片以任意应变 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots, \gamma_{xy}$；若各碎片的应变不适合条件(2.12)时，那末将它們再拼凑起来而成的物体里必然产生錯位現象。在一般的情形下，我們不考虑单連通物体发生錯位現象的問題，所以非恒滿足条件(2.12)不可❶。

在有限变位理論里，应变張量 e_{mn} 可以按(2.6)式导出的充要条件，亦卽协調条件，是由 $g_{ij}=\delta_{ij}+2e_{ij}$ 所作的 Riemann 曲率張量 $R_{ijkl}=0$（参看本丛书中矢野著《几何学》§46；山本著《有限变位彈性論》）。

§3 应力与平衡方程

考虑变形前由六个面

$$x_i=\text{const},\quad x_i+dx_i=\text{const} \tag{3.1}$$

所包圍着的微小六面体在变形后的平衡方程(图3.1)。在变形后的六面体上作用的力，是通过六个面由外侧的物体部分所作用的

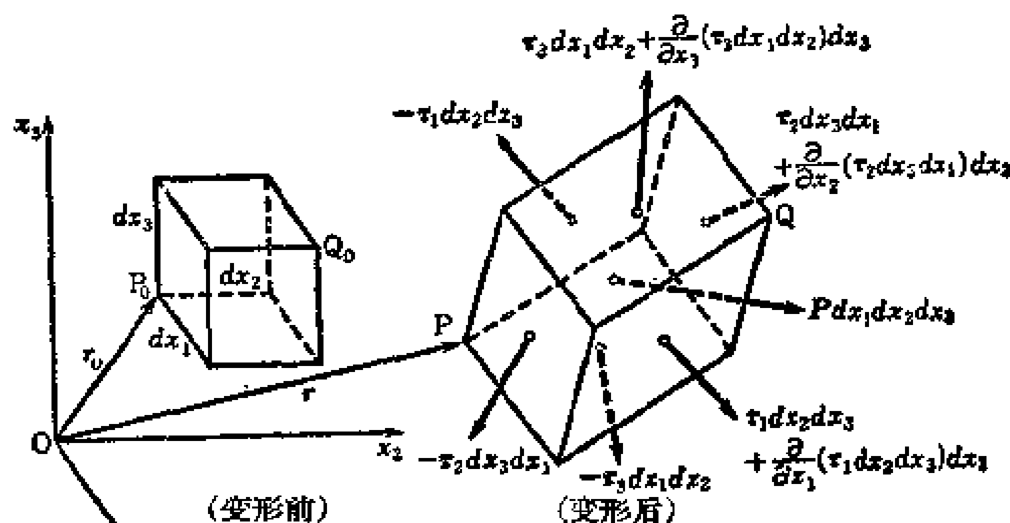


图3.1 应　　力

❶ (2.11)和(2.12)是等价的，今后就将(2.11)叫作协調条件。这两个式子的等价是由 Riemann 几何观点作出的。关于这一点可参看譯者序。——譯者注

内力，及象惯性力那样对应着六面体的质量而作用的所謂体力。着設变形前由 dx_2 和 dx_3 所作的矩形上，变形后作用的内力为 $\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3$，則在六面体上作用的内力是

$$\left.\begin{aligned}
&-\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3, \quad \boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3+\frac{\partial}{\partial x_1}(\boldsymbol{\tau}_1 dx_2 dx_3)dx_1,\\
&-\boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}(\boldsymbol{\tau}_2 dx_3 dx_1)dx_2,\\
&-\boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2, \quad \boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2+\frac{\partial}{\partial x_3}(\boldsymbol{\tau}_3 dx_1 dx_2)dx_3.
\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

着再把 τ_{ij} 定义为

$$\boldsymbol{\tau}_i=\sum_{j=1}^{3}\tau_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{3.3}$$

且設变形前 dx_1, dx_2, dx_3 所包圍的微小六面体上，变形后作用的体力为 $\boldsymbol{P}dx_1 dx_2 dx_3$，則在这个微小六面体上作用的力及力矩的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}(\partial\boldsymbol{\tau}_i/\partial x_i)+\boldsymbol{P}=0,\\
&\tau_{ij}=\tau_{ji}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

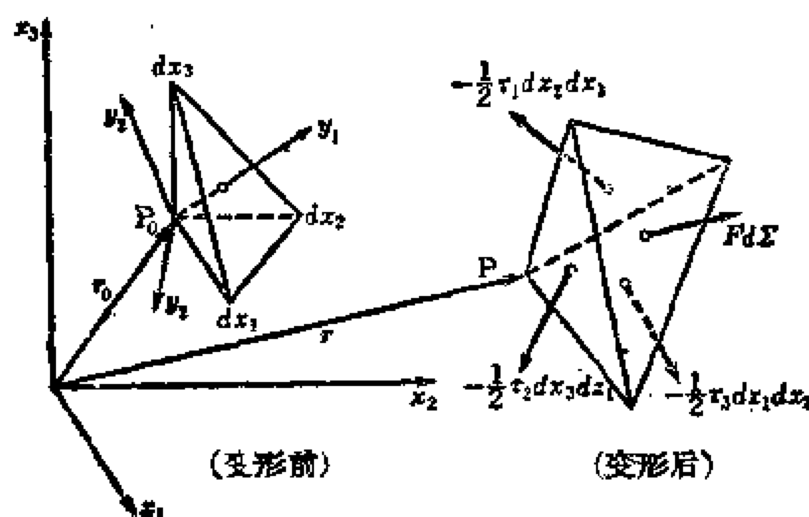


图 3.2 微小四面体

为了推出 τ_{ij} 的变换律，考虑图 3.2 那样的微小四面体的平衡。設变形前这个微小四面体的斜面的面积是 $d\Sigma$，变形后在这

个斜面上作用的内力是 $Fd\Sigma$，则平衡方程为

$$\boldsymbol{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right)dx_2\,dx_3+\boldsymbol{\tau}_2\left(\frac{1}{2}\right)dx_3\,dx_1+\boldsymbol{\tau}_3\left(\frac{1}{2}\right)dx_1\,dx_2=\boldsymbol{F}\,d\Sigma. \quad (3.5)$$

在图 3.2 内，考虑原点 P_0 的局部直角坐标系 y_1, y_2, y_3，若使其一轴 y_1 与斜面的外向法綫方向一致时，则由几何关系得

$$\left.\begin{aligned}&dx_2\,dx_3=2\frac{\partial y_1}{\partial x_1}d\Sigma,\quad dx_3\,dx_1=2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}d\Sigma,\\&dx_1\,dx_2=2\frac{\partial y_1}{\partial x_3}d\Sigma.\end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

由(3.5)及(3.6)得到

$$\boldsymbol{\tau}_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\boldsymbol{\tau}_2\frac{\partial y_1}{\partial x_2}+\boldsymbol{\tau}_3\frac{\partial y_1}{\partial x_3}=\boldsymbol{F}. \quad (3.7)$$

若将定义在坐标系 (y_1, y_2, y_3) 里的 $\boldsymbol{\tau}_i$ 及 τ_{ij} 各写为 $\boldsymbol{s}_i$ 及 s_{ij}，则(3.7)可写成

$$\sum_k \boldsymbol{\tau}_k\frac{\partial y_i}{\partial x_k}=\boldsymbol{s}_i. \quad (3.8)$$

于是按照定义，有

$$\boldsymbol{\tau}_k=\sum_l \tau_{kl}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_l},\quad \boldsymbol{s}_i=\sum_j s_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y_j}. \quad (3.9)$$

将(3.8)和(3.9)归并起来，便得到变换律

$$s_{ij}=\sum_{k,l=1}^{3}\tau_{kl}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\frac{\partial y_j}{\partial x_l}. \quad (3.10)$$

这里的 τ_{kl} 叫作伪应力，在直角坐标变换时，它服从于張量变换律(3.10)。

在直角坐标的微小变位理論里，設变位是微小的，并作如下的近似

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_1}=\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_3\approx\boldsymbol{i}_1,$$

且将 τ_{ij} 代以

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\tau}_1=\sigma_x\boldsymbol{i}_1+\tau_{xy}\boldsymbol{i}_2+\tau_{xz}\boldsymbol{i}_3,\quad \boldsymbol{\tau}_2=\tau_{yx}\boldsymbol{i}_1+\sigma_y\boldsymbol{i}_2+\tau_{yz}\boldsymbol{i}_3,\\&\boldsymbol{\tau}_3=\tau_{zx}\boldsymbol{i}_1+\tau_{zy}\boldsymbol{i}_2+\sigma_z\boldsymbol{i}_3.\end{aligned}\right\}\tag{3.11}$$

又命 $$\boldsymbol{P}=X\boldsymbol{i}_1+Y\boldsymbol{i}_2+Z\boldsymbol{i}_3$$

时(图 3.3)，則(3.4)变成常見的关系式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0,\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0,\\&\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad\tau_{zx}=\tau_{xz},\quad\tau_{xy}=\tau_{yx}.\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

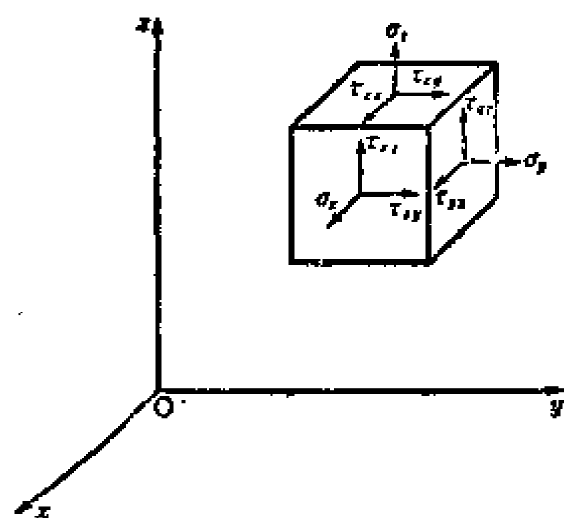


图 3.3 应 力 图

今后为了簡单起見，将用記号 σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{12} 代替 σ_x, σ_y, σ_z, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}; 用 X_1, X_2, X_3 代替 X, Y, Z。这样，(3.12)变成如下形状：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}+X_i=0,\\&\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\\&\quad(i,j=1,2,3).\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

这里 $\sigma_{ij,j}$ 表示 σ_{ij} 对于 x_j 的导数，而重复两次的标数乃表示对于該标数自 1 至 3 作总和。例如

$$\sigma_{ij,j}=\sigma_{i1,1}+\sigma_{i2,2}+\sigma_{i3,3}.$$

(3.12)是含有九个未知量的六个方程，显然，仅由这些方程是不能把問題解开的，这便是静不定問題产生的原因。为了使問題有解，就必須导入应力应变关系。

§4 应力应变关系

用彈性論处理物体内部应力到处都在屈服应力以下的情形时，曾把应力应变关系假定为前面所說的 τ_{ij} 和 e_{mn} 間的关系，例如命为

$$f_q(\tau_{11}, \tau_{22}, \cdots; e_{11}, e_{22}, \cdots) = 0 \quad (q=1, 2, \cdots, 6). \tag{4.1}$$

若想将上式就 τ_{ij} 解开时，因为 e_{mn} 是微小的，所以在作 Taylor 展开时只取一阶的項，就可以得到

$$e_{mn} = C_{mnij}\tau_{ij} \tag{4.2}$$

形状的解。这里 C_{mnij} 是彈性常数，(4.2) 叫作一般 **Hooke 律**。若假定材料为各向同性，則 C_{mnij} 中只有两个独立的常数。

在微小变位彈性論里，如前所述，将 $e_{11}, \cdots$ 各代以 $\varepsilon_x, \cdots$；将 τ_{ij} 各代以 $\sigma_x, \cdots$；于是在各向同性的情形下有如下形状的应力应变关系：

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), \cdots, G\gamma_{yz} = \tau_{yz}, \cdots. \tag{4.3}$$

或者反过来解，則有

$$\sigma_x = 2G\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right], \cdots,$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \cdots, \tag{4.4}$$

这里 $E = 2(1+\nu)G$，而 E 是 Young 模量，ν 是 Poisson 比，G 是剪切彈性模量。(4.3) 及 (4.4) 可以簡写如下：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \tag{4.3'}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu}e\delta_{ij} + 2G\varepsilon'_{ij}. \tag{4.4'}$$

这里

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad e = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \tag{4.5}$$

σ'_{ij} 及 ε'_{ij} 各叫作应力偏量及应变偏量，而 δ_{ij} 是前面已經說过的

Kronecker 記号，即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 当 i=j;\\ 0, & 当 i\neq j.\end{cases}$$

这时有

$$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij},\quad \varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon\delta_{ij}, \tag{4.6}$$

也就是

$$\sigma'_{11}=\sigma_x-\sigma,\ \cdots,\ \sigma'_{23}=\tau_{xy},\ \cdots;$$

$$\varepsilon'_{11}=\varepsilon_x-\varepsilon,\ \cdots,\ \varepsilon'_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{yz},\ \cdots.$$

至于以下各关系的成立都很容易驗証：

$$\sigma'_{ii}=\sigma'_{11}+\sigma'_{22}+\sigma'_{33}=0,$$

$$\varepsilon'_{ii}=\varepsilon'_{11}+\varepsilon'_{22}+\varepsilon'_{33}=0.$$

§5 边界条件

将物体表面 S 分成两部分，一部分是由外力确定边界条件的部分 S_1，另一部分是由变位确定边界条件的部分 S_2，并且有 $S=S_1+S_2$。 設 S_1 上的外力在变形前对于每个单位面积是 $\bar{\boldsymbol{F}}$，S_2 上的变位向量是 $\bar{\boldsymbol{r}}$，那末按照(3.7)可得如下边界条件：

$$\left.\begin{array}{ll}在 S_1 上 & \sum \tau_i\dfrac{\partial y_n}{\partial x_i}=\bar{\boldsymbol{F}},\\ 在 S_2 上 & \boldsymbol{r}=\bar{\boldsymbol{r}}.\end{array}\right\} \tag{5.1}$$

这里 y_n 表示变形前表面 S_1 上的外向法綫方向的直角坐标。

在直角坐标的微小变位理論里，命 y_n 的方向余弦是 l, m, n，即

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_1}=l,\quad \frac{\partial y_n}{\partial x_2}=m,\quad \frac{\partial y_n}{\partial x_3}=n;$$

更命 $\bar{\boldsymbol{F}}=\bar{F}_x\boldsymbol{i}_1+\bar{F}_y\boldsymbol{i}_2+\bar{F}_z\boldsymbol{i}_3$，且在 S_2 上給出的变位向量的 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 方向的分量各为 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$，則(5.1)变为

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad \left.\begin{aligned} F_x &\equiv \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \bar{F}_x, \\ F_y &\equiv \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \bar{F}_y, \\ F_z &\equiv \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = \bar{F}_z, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上} \quad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad w = \bar{w}. \tag{5.3}$$

若將 l, m, n 写成 n_1, n_2, n_3；將 $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z$ 写成 $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$；將 u, v, w 写成 u_1, u_2, u_3 时，則(5.2)及(5.3)可縮写为

$$\text{在 } S_1 \text{ 上} \quad F_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i \quad (i=1, 2, 3), \tag{5.2'}$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上} \quad u_i = \bar{u}_i \quad (i=1, 2, 3). \tag{5.3'}$$

§6 微小变位彈性論所处理的問題

微小变位彈性論所处理的問題可以这样来叙述：

在完全沒有应力的物体表面部分 S_1 上的外力为 $\bar{F}_i (i=1, 2, 3)$，在其余表面部分 S_2 上的变位为 $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$，而且对于每个单位体积都有一个体力 $X_i (i=1, 2, 3)$ 作用时，問在物体內部將引起怎样的应力 σ_{ij} 及变位 u_i？

要解决这一問題，必須应用如下几个方程。

$$\text{平衡方程：} \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0; \tag{6.1}$$

$$\text{应力应变关系：} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} e \delta_{ij} + 2G\varepsilon'_{ij}, \tag{6.2}$$

$$\text{或} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2G}; \tag{6.2'}$$

$$\text{协調条件：} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \tag{6.3}$$

$$\text{边界条件：} \quad \text{在 } S_1 \text{ 上} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{F}_i, \tag{6.4}$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上} \quad u_i = \bar{u}_i \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{6.5}$$

所有满足这些条件全部的量，就是我們所求的解，叫作正确解。解方程(6.1)到(6.5)的方法已經有了好几种，例如，利用(6.2)及(6.3)將(6.1)，(6.4)，(6.5)变成关于 u_i 的三个联立微分方程和

它的边界条件，便是一种方法。若想知道那些解法的詳情，可以参閱卷末的参考文献。

解微小变位彈性問題时，可以不必直接作微分方程的配合，而采用变分法的方法。这种方法特别在彈性問題的近似解法里有着重要的应用。以下將略述微小变位彈性論里的两个变分原理。

§7 第一变分原理

这个原理又叫作**最小势能原理**，是由假想变位原理推导出来的。首先从应变分量定义应变能量函数 A：

$$A=\frac{(1-\nu)G}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+\frac{G}{2}[\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2 \\ -4(\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y)]. \tag{7.1}$$

这是在关系式

$$\delta A=\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\cdots+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}=\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{7.2}$$

里將 σ_x, … 等用应力应变关系(6.2)代入后积分而得到的。A 表示每个单位体积的应变能量，所以具有如下性质：

$$\frac{\partial A}{\partial\varepsilon_x}=\sigma_x,\ \cdots,\ \frac{\partial A}{\partial\gamma_{xy}}=\tau_{xy}. \tag{7.3}$$

我們順便指出，(7.1)还可以写成如下形状[1]：

$$A=\frac{3E}{2(1-2\nu)}e^2+G\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{7.4}$$

第一变分原理可以表达如下：

“設滿足几何边界条件(6.5)的一組变位是 u_i^*，利用协調条件(6.3)由 u_i^* 导出的应变为 ε_{ij}^*（以后將它叫作比較第），那末使

$$\Pi_p^*=\iiint_V(A^*-X_iu_i^*)dv-\iint_{S_1}\bar{F}_iu_i^*dS \tag{7.5}$$

---

[1] $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{11}\varepsilon_{11}+\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}+\varepsilon_{13}\varepsilon_{13}+\varepsilon_{21}\varepsilon_{21}+\varepsilon_{22}\varepsilon_{22}+\varepsilon_{23}\varepsilon_{23}+\varepsilon_{31}\varepsilon_{31}+\varepsilon_{32}\varepsilon_{32}+\varepsilon_{33}\varepsilon_{33}$
$=\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+\frac{1}{2}(\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2+\gamma_{xy}^2)$.

取极小值时，就得到了正确解。这里 V^* 表示該积分是对物体全区域作的，S_1 表示这个积分对表面部分 S_1 作的，A^* 表示在(7.1)式的右側里将 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \cdots$ 各代以 $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \cdots$ 后而得到的 A。"

証明 設用应力应变关系(6.2′)联系着的两組应力应变各为 $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ 及 $\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*$。容易驗証下列关系必成立：

$$\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}=\frac{\sigma_{ij}'\sigma_{ij}^{*\prime}}{2G}+\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma\sigma^*=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*. \tag{7.6}$$

利用(7.6)得

$$2(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij})\sigma_{ij}=(\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})-(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij}), \tag{7.7}$$

再由(6.2′)有

$$(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2G}(\sigma_{ij}^{*\prime}-\sigma_{ij}')(\sigma_{ij}^{*\prime}-\sigma_{ij}')$$

$$+\frac{3(1-2\nu)}{E}(\sigma^*-\sigma)^2\geqslant 0. \tag{7.8}$$

所以只要当 $\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}$ 时，就有

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\geqslant(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij})\sigma_{ij}, \tag{7.9}$$

且上式的等号仅当 $\sigma_{ij}^*=\sigma_{ij}$ 时才能成立。

今再設正确解的应变、应力及变位各为 $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 及 u_i，若把正确解的 Π_p^* 写为 Π_p，則有

$$\Pi_p^*-\Pi_p=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)dv-\iiint_V X_i(u_i^*-u_i)\,dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{F}_i(u_i^*-u_i)\,dS$$

$$\geqslant\iiint_V(\varepsilon_{ij}^*-\varepsilon_{ij})\sigma_{ij}\,dv-\iiint_V X_i(u_i^*-u_i)\,dv$$

$$-\iint_{S_1}\bar{F}_i(u_i^*-u_i)\,dS\ [\text{由}(7.9)]$$

$$=-\iiint_V(\sigma_{ij,j}+X_i)(u_i^*-u_i)\,dv$$

$$+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}n_j-\bar{F}_i)\ (u_i^*-u_i)dS+\iint_{S_2}\sigma_{ij}n_j(u_i^*-u_i)dS.$$

[按 Green 定理]　　(7.10)

正确解必满足 V 里的平衡方程(6.1)和 S_1 上的边界条件，且在 S_2 上正确解和比較解都有 $u_i=\bar{u}_i$，$u_i^*=\bar{u}_i$，所以(7.10)的最后一項消去，从而証明了

$$\Pi_p^*\geqslant\Pi_p. \tag{7.11}$$

§8　第二变分原理

这个原理又叫作**余能原理**，是将最小势能原理通过 Friedrichs 变换后而得到的[5],[6]。首先用应力分量定义余能函数 B：

$$B=\frac{1}{2E}\{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2+2(1+\nu)(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2-\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_x)\}. \tag{8.1}$$

这是在公式

$$\delta B=\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\cdots+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy}=\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} \tag{8.2}$$

里将 ε_x, … 各用(6.2′)代入后积分而得到的。它有如下性质：

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_x}=\varepsilon_x,\ \cdots,\ \frac{\partial B}{\partial\tau_{xy}}=\gamma_{xy}, \tag{8.3}$$

(8.1)又可以写成❶

$$B=\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2+\frac{1}{4G}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}. \tag{8.4}$$

第二变分原理可以表述如下：

"設滿足平衡方程(6.1)和力学边界条件(6.4)的一組应力为 σ_{ij}^*(这叫作比較解)❷，那末使

$$\Pi_c^*=\iiint_V B^*dv-\iint_{S_2}\sigma_{ij}^*n_j\bar{u}_i dS \tag{8.5}$$

---

❶ $\sigma_{ij}\sigma_{ij}=\sigma_{11}\sigma_{11}+\sigma_{12}\sigma_{12}+\sigma_{13}\sigma_{13}+\sigma_{21}\sigma_{21}+\sigma_{22}\sigma_{22}+\sigma_{23}\sigma_{23}+\sigma_{31}\sigma_{31}+\sigma_{32}\sigma_{32}+\sigma_{33}\sigma_{33}=\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+2(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)$.

❷ 选取 $\sigma_{ij}^*=\sigma_{ji}^*$ 的 σ_{ij}^*.

取极小值时，便得到了正确解。这里 B^* 表示(8.1)右侧的 σ_x, … 各代以 σ_x^*, … 后而得到的 B。”

証明 首先由(7.6)及(7.9)导出

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\geqslant(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}. \tag{8.6}$$

設比較解的应变应力各为 ε_{ij}^*, σ_{ij}^*; 正确解的应变应力及变位各为 ε_{ij}, σ_{ij} 及 u_i, 若把正确解的 Π_c^* 写为 Π_c, 則有

$$\begin{aligned}\Pi_c^*-\Pi_c&=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)dv-\iint_{S_2}(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})n_j\bar{u}_i\,dS\\&\geqslant\iiint_V(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})\varepsilon_{ij}\,dv-\iint_{S_2}(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})n_j\bar{u}_i\,dS\ [\text{由}(8.6)]\\&=-\iiint_V(\sigma_{ij,j}^*-\sigma_{ij,j})u_i\,dv+\iint_{S_1}(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})n_ju_i\,dS\\&\quad+\iint_{S_2}(\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij})n_j(u_i-\bar{u}_i)\,dS.\ [\text{按 Green 定理}]\end{aligned} \tag{8.7}$$

因为 σ_{ij}^* 及 σ_{ij} 都必須滿足平衡方程(6.1)，所以它們的差 $\sigma_{ij}^*-\sigma_{ij}$ 必滿足 $\sigma_{ij,j}^*-\sigma_{ij,j}=0$。又在 S_1 上有

$$\sigma_{ij}^*n_j=\bar{F}_i,\quad \sigma_{ij}n_j=\bar{F}_i,$$

在 S_2 上有 $u_i=\bar{u}_i$，所以(8.7)的最后一项为零，从而証明了

$$\Pi_c^*\geqslant\Pi_c. \tag{8.8}$$

以上証明了 Π_p 和 Π_c 的极小性质。但从 Π_p 及 Π_c 的第一变分为零，即逗留值条件 $\delta\Pi_p=0$ 或 $\delta\Pi_c=0$ 也能求出正确解来，这是大家都知道的。

上述两个原理在求彈性問題的近似解时很有用处。將这两个原理合并起来使用，就可以求得杆件扭將剛性等的上下界。关于这方面的內容可以參閱书末文献[7][8]❶。

❶ 还可参阅本丛书中加藤敏夫著：《变分法及其应用》95～99 頁。

第3章　塑性論基础

前章將彈性論作了一个概述，从本章起，开始对塑性論問題进行考察。彈性論和塑性論最显著的差别在于应力应变关系，在塑性域里，应力和应变間不再有(4.1)那样的关系式成立，应变不仅取决于最終状态的应力，而且还要依賴于加載过程的路綫以及退火处理。所以在塑性論里和彈性論中的应力应变关系相当的关系是应力增量和应变增量关系。基于这个关系上的塑性論，叫作应变增量塑性論。本书从第3章到第6章就是讲述这样的塑性論和它的应用。第7章所要讲的全应变塑性論是这种塑性論的特例。

应变增量塑性論的問題可以大概归結如下：

"設已指定在某一瞬时 t 具有平衡状态的物体 V，和这一物体内部所有点的应力状态 σ_{ij} 及其荷載路綫，并假定在瞬时 $t+dt$ 时物体表面部分 S_1 上的外力增量为 dF_i $(i=1, 2, 3)$，而其余表面部分 S_2 上的变位增量为 $d\bar{u}_i$$(i=1, 2, 3)$。那末这时在物体内部将引起怎样的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 及变位增量 du_i？"

本章里将求出解这一問題时所必需的应力增量和应变增量間的关系(今后也簡称它为应力应变关系)。当确定应变增量的理論后，将諸量間成立的方程沿着荷載路綫作积分，就可以計算出任意荷載阶段下物体里面的应力及应变了。

在前一章的彈性論里，x_i 是在退火后无应力状态时所决定的物体坐标，今在应变增量塑性論里，x_i 却是空間坐标。在前一章里 σ_{ij} 是 ε_{mn} 应变所引起的应力，而在应变增量塑性論里 $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$ 却是瞬間 t 时直角坐标的六平面 $x_k=\text{const}$, $x_k+dx_k=\text{const}$ $(k=1, 2, 3)$所包圍的微小六面体的側面上作用的应力，即应变增

量理論是具有初始应力的物体的微小变位理論。前一章的 σ_{ij}, s_{ij}, u_i 可以看作是跟应变增量理論里的 $d\sigma_{ij}$, de_{ij}, du_i 相对应的。

§9 屈服条件

首先考虑物体的微小元素达到怎样的应力状态时才能引起屈服？在簡单拉伸的情形下，当应力达到屈服应力时才引起屈服（图1.4），当然由于压縮和剪斷也可能引起屈服。其次，我們还可以考察这样的問題，将薄壁圓管拉伸到引起塑性变形后除去荷載的一部分，那末需要再加上怎样的扭轉，才能引起新的塑性变形（即发生屈服）？通常在組合应力的情形，再度使塑性变形开始的应力間可以設想有如下关系式：

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \cdots, \tau_{xy})=c. \tag{9.1}$$

这里 c 是将物体完全退火而回到应力为零的状态后，再进行机械处理或热处理时所决定的参数。(9.1) 叫作屈服条件。

若設想材料是各向同性的，則 (9.1) 可以写成

$$f(J_1, J_2, J_3)=c. \tag{9.2}$$

J_1, J_2, J_3 是应力張量 σ_{ij} 的三个低阶不变量，而且可以用主应力分量 σ_I, σ_{II}, σ_{III} 定义如下：

$$\left.\begin{aligned} J_1&=\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}, \\ J_2&=-(\sigma_{II}\sigma_{III}+\sigma_{III}\sigma_I+\sigma_I\sigma_{II}), \\ J_3&=\sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}. \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

按实驗結果，即使各向等压（静水压）或各向等拉分别起作用时，在一阶近似范圍内，金属的屈服也不受影响。所以若将此看作所考虑的材料的属性时，那末 f 仅取决于应力偏量 $\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma\delta_{ij}$ 的主分量 σ'_I, σ'_{II}, σ'_{III}。但 $\sigma'_I+\sigma'_{II}+\sigma'_{III}=0$，所以 (9.2) 变成

$$f(J'_2, J'_3)=c. \tag{9.4}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{\rm I}'^2+\sigma_{\rm II}'^2+\sigma_{\rm III}'^2\right)=\frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}', \\ J_3' &= \frac{1}{3}\left(\sigma_{\rm I}'^3+\sigma_{\rm II}'^3+\sigma_{\rm III}'^3\right)=\frac{1}{3}\sigma_{ij}'\sigma_{jk}'\sigma_{ki}'. \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

下面我們考察屈服条件的几何学表現(图9.1)。若将$\sigma_{\rm I}$, $\sigma_{\rm II}$, $\sigma_{\rm III}$取作直角坐标时,(9.4)和$\sigma_{\rm I}+\sigma_{\rm II}+\sigma_{\rm III}$沒有关系,所以变成以$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$为母綫方向的柱面。这时只要考虑此柱面和平面$\sigma_{\rm I}+\sigma_{\rm II}+\sigma_{\rm III}=0$(平面$\Pi$)的交截曲綫就够了。这个曲綫叫作屈服曲綫。若取$\sigma_{\rm III}$軸在平面$\Pi$上的正射影的方向为$y$軸的方向,并在該平面上取垂直于这个方向的$x$軸时,就得关系如下:

$$\sigma_{\rm I}'=-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y,\ \sigma_{\rm II}'=\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y,\ \sigma_{\rm III}'=\sqrt{\frac{2}{3}}y. \tag{9.6}$$

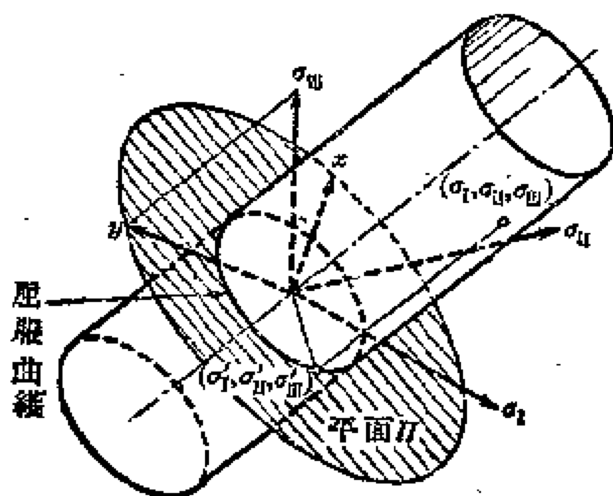


图9.1　屈服曲綫

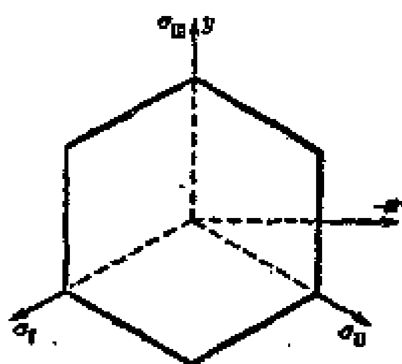


图9.2　Tresca 屈服曲綫

經常用到的屈服条件有以下两种:

(1) **Tresca 屈服条件**　假設最大剪切应力达到某一个值时就引起屈服。例如,当$\sigma_{\rm I}\geqslant\sigma_{\rm II}\geqslant\sigma_{\rm III}$时,这个条件是

$$\sigma_{\rm I}-\sigma_{\rm III}=\text{常数}。 \tag{9.7}$$

在此情形下,利用(9.6)立即推知屈服曲綫是正六角形(图9.2)。

(2) **Mises 屈服条件** 設当 J_2' 达到某一个值时就引起屈服，即

$$2J_2'=\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'=\sigma_{I}'^2+\sigma_{II}'^2+\sigma_{III}'^2=2k^2, \tag{9.8}$$

或

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2)=6k^2. \tag{9.8'}$$

这里 k 是对应于(9.4)的 c 的，乃由应变路綫所决定的參数。利用(9.6)就可以知道，屈服曲綫是一个圓，其半徑为 $\sqrt{2}k$（图9.3）。在(9.8′)里，除了 τ_{xy} 之外，使其他应力分量都为零时，便得到 $\tau_{xy}=k$，即 k 乃是将薄壁圓管扭轉而得到的純剪切屈服时的最大剪切应力。若在(9.8′)内設 $\sigma_x=Y$，而其余应力都为零，这样便得到 $Y=\sqrt{3}k$，即 k 等于拉伸屈服应力的

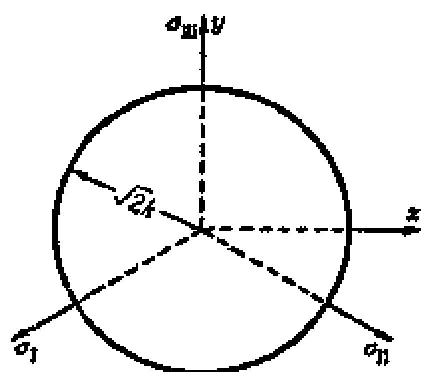


图 9.3 von Mises 屈服曲綫

$\frac{1}{\sqrt{3}}$。此时最大剪切应力是 $\frac{Y}{2}$ 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}k$。按照 Mises 的屈服条件，純剪切的剪切应力是簡单拉伸时的最大剪切应力的 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍，即約为 1.155 倍。另一方面，按照 Tresca 的条件則两者相等。

对于多数金属，可以証实 Mises 条件比 Tresca 条件更能符合实驗結果。但在理論上应用 Tresca 条件比較簡单，所以多被采用。

§10 应变强化或加工硬化

以下将考慮退火后的塑性变形和 Mises 圓半徑 $\sqrt{2}k$ 間的关系問題。假設在瞬时 t 具有平衡状态的物体中，占有位置 $x_i(i=1,2,3)$ 的元素，随着外荷载的微小增加，引起了微小应力增加 $d\sigma_{ij}$ 及微小应变增加 $d\varepsilon_{ij}$。这里 $d\varepsilon_{ij}$ 定义为

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}+\frac{\partial(du_j)}{\partial x_i}\right].\tag{10.1}$$

但 $du_i(i=1,2,3)$ 是表示在瞬时 t 位于 $x_i(i=1,2,3)$ 的物体元素的变位。在第2章彈性論里，曾設在退火后的状态所决定的物体坐标为 x_i，但在应变增量塑性論里采用的 x_i 是空間坐标，这里还有重提的必要。

現在作分解 $d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^e+d\varepsilon_{ij}^p$，将 $d\varepsilon_{ij}^e$ 叫作彈性应变增量，$d\varepsilon_{ij}^p$ 叫作塑性应变增量。$d\varepsilon_{ij}^e$ 乃卸去所增加的荷載后能恢复原状的应变增量，所以由(4.3′)显然有

$$d\varepsilon_{ij}^e=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma'_{ij}}{2G},\tag{10.2}$$

这里 $$d\sigma=\frac{1}{3}d\sigma_{ii}=\frac{1}{3}(d\sigma_{11}+d\sigma_{22}+d\sigma_{33}),$$

即使除去 $d\sigma_{ij}$ 后 $d\varepsilon_{ij}^p$ 也还殘留。物体元素作变形 $d\varepsilon_{ij}$ 时，应力所做的功对于每个单位体积是 $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}$，其中 $dW_e=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^e$ 是可恢复的彈性功。$dW_p=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p$ 叫作对于每个单位体积的塑性功。塑性变形在热力学的意义下是不可逆的过程，所以 $dW_p\geqslant0$。若从物体的某个元素着眼，沿着該退火后的物体直到瞬时 t 所經历的路綫而考虑积分

$$W_p=\int\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p,\tag{10.3}$$

并假定 Mises 圓的半徑仅为 W_p 的函数，那末(9.8)便可以写成如下形状：

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\}^{\frac{1}{2}}=k(W_p),\tag{10.4}$$

这样就可以使应变强化和 Mises 圓的半徑間有了联系。

§11 应力应变关系

在前一节中，已經使 Mises 屈服条件和应变强化間相互联系

起来。若将同样的理論推广到一般屈服条件(9.4)中，則有

$$f(J_2', J_3') = F\left(\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p\right). \tag{11.1}$$

但在此式內，F 代替了(9.4)里的 c。

假設物体元素的应力 σ_{ij} 满足屈服条件(11.1)，即設应力点位于某一屈服曲綫上。这时，若再增加应力使該应力点达到該屈服曲綫的外側，那末塑性应变也应該再增加，这叫作加載。此时可以决定 f 的符号，使它满足条件

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial J_2'} dJ_2' + \frac{\partial f}{\partial J_3'} dJ_3' > 0. \tag{11.2}$$

反之，虽然使应力变化，但应力点却向屈服曲綫內側移动，这时塑性应变并不发生变化，这叫作卸載。$df<0$ 是和卸載相对应的。使应力变化而应力点却仍然沿着同一屈服曲綫移动时，其塑性应变也不发生变化，这叫作中性。此时有 $df=0$。在上述三者的任何情况下 ($df>0$, $df=0$, $df<0$)，其彈性应变增量都由(10.2)給出来。

其次求塑性应变增量和应力增量間的关系。为了使塑性应变增量满足对于中性变化为零的条件，先設

$$d\varepsilon_{ij}^p = G_{ij} df, \tag{11.3}$$

然后再将由实驗所得塑性的体积变化为零的結果应用到理論里来，就得到条件

$$G_{11} + G_{22} + G_{33} = 0.$$

再假定材料是各向同性的，則塑性应变增量張量的主軸和主应力軸一致，于是 G_{ij} 的主軸也必和主应力軸一致。若設

$$G_{ij} = h\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{11.4}$$

时，則这些条件可以充分普遍地得到满足。这里 g 及 h 是 J_2', J_3' 的数量函数，也可以是应变路綫的函数。由(11.3)，(11.4)得到塑

性应变增量和应力增量間的关系式

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=h\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}df, \tag{11.5}$$

或者稍作一些計算，变成

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=h\left(\frac{\partial g}{\partial J_2'}\sigma_{ij}'+\frac{\partial g}{\partial J_3'}t_{ij}'\right)df. \tag{11.6}$$

这里 $t_{ij}'=\sigma_{ik}'\sigma_{kj}'-\frac{2}{3}J_2'\delta_{ij}$ 是应力偏量的自乘偏量。将 (11.1) 代入到(11.5)里，則有

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=hF'\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}(\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}^{p}). \tag{11.7}$$

这里 F' 是对其参数作出的导数。将(11.7)两側乘以 σ_{ij} 再作总和，更設 g 是 σ_{ij} 的 n 阶齐次函数，則有 $\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}=ng$，所以(11.7)变成

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{p}=hF'\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\sigma_{ij}\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}^{p}=nhF'g\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}^{p},$$

从而得到

$$nhF'g=1. \tag{11.8}$$

这便是 g 和 h 間的关系。利用(11.8)由(11.5)消去 h，得

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{1}{ng}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\frac{df}{F'},\quad df\geqslant0. \tag{11.9}$$

f，g，F 都是用实驗資料所决定的。(11.9)是一般的应力增量和塑性应变增量間的关系，作为 (11.9) 的特例的应力增量和应变增量关系式，在历史上曾經推导出来，下面将予以說明。

§12 对于强化材料的 Prandtl-Reuss 方程

Prandtl 和 Reuss 曾提出如下方程

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{\sigma_x'}=\frac{d\varepsilon_y^p}{\sigma_y'}=\frac{d\varepsilon_z^p}{\sigma_z'}=\frac{d\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}}=\frac{d\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}}=\frac{d\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}, \tag{12.1}$$

即

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\sigma_{ij}'d\lambda. \tag{12.2}$$

这里 $d\lambda$ 是一个数量的比例常数。塑性功是 $dW_p=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p=\sigma_{ij}'d\varepsilon_{ij}^p$，在此式内代入 (12.2)，得到 $dW_p=\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'d\lambda$. 由于 $dW_p\geqslant 0$，所以 $d\lambda\geqslant 0$，即 $d\lambda$ 是正值数量。比较 (12.2) 和 (11.9)，就可以看出 (12.2) 是在 (11.9) 命 $g=J_2'$，$\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}=\sigma_{ij}'$，$n=2$ 而得来的，所以此时 (11.9) 变成

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{\sigma_{ij}'}{2J_2'}\frac{df}{F'}\quad(df\geqslant 0). \tag{12.3}$$

若設

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}\{\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'\}^{\frac{1}{2}},\quad d\bar{\varepsilon}^{p}=\sqrt{\frac{2}{3}}\{d\varepsilon_{ij}^{p}d\varepsilon_{ij}^{p}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{12.4}$$ [1]

則由 (12.2) 得到 $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p=\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p$. 于是 (11.1) 变为

$$f(J_2',J_3')=F\left(\int\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p\right). \tag{12.5}$$

以后采用 Mises 屈服条件 $f=\bar{\sigma}=\sqrt{3J_2'}$ 时，(12.5) 就变成

$$\bar{\sigma}=F\left(\int\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p\right). \tag{12.6}$$

关系式 (12.3) 也就变为

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\frac{3\sigma_{ij}'d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}^2F'},\quad F'=\frac{1}{\bar{\sigma}}\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p}\quad(d\bar{\sigma}\geqslant 0). \tag{12.7}$$

但从关系式 (12.6) 可以看出，此时的 $\bar{\sigma}$ 仅为 $\int d\bar{\varepsilon}^p$ 的函数。所以若用

$$\bar{\sigma}=H\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) \tag{12.8}$$

代替 (12.6) 时，則有 $F'=H'/\bar{\sigma}$. 总括以上各点，得到总的应力应变关系式：

---

[1] (12.4) 里的 $\bar{\sigma}$ 叫作广义应力、有效应力或相当应力，若 σ_x 以外的应力分量都是零时，就有关系式 $\bar{\sigma}=\sigma_x$.

$$
\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_{ij}&=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma'_{ij}}{2G}+\frac{3\sigma'_{ij}d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}H'}, & d\bar{\sigma}&\geqslant 0,\\
d\varepsilon_{ij}&=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma'_{ij}}{2G}, & d\bar{\sigma}&<0.
\end{aligned}\right\} \tag{12.9}
$$

若用增量除以 dt（t 是时間）而得的所謂速度代替增量，并用加上点（˙）的記号表示时，则(12.9)变成

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij}&=\frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}\delta_{ij}+\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}+\frac{3\sigma'_{ij}\dot{\bar{\sigma}}}{2\bar{\sigma}H'}, & \dot{\bar{\sigma}}&\geqslant 0,\\
\dot{\varepsilon}_{ij}&=\frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}\delta_{ij}+\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}, & \dot{\bar{\sigma}}&<0.
\end{aligned}\right\} \tag{12.10}
$$

(12.9) 及 (12.10) 叫作强化材料的 Prandtl-Reuss 方程。

現在求(12.9)的逆关系。将(12.9)的第一式两側乘以 σ'_{ij} 并作总和，得到

$$
\bar{\sigma}\left(\frac{1}{3G}+\frac{1}{H'}\right)d\bar{\sigma}=\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}. \tag{12.11}
$$

因材料是强化的，所以 $H'>0$。于是 $d\bar{\sigma}>0$ 是和 $\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}>0$ 相对应的。有了这些准备就可以解(12.9)，得到

$$
\left.\begin{aligned}
d\sigma_{ij}&=\frac{E}{1-2\nu}de\delta_{ij}+2G\left[d\varepsilon'_{ij}-\frac{\sigma'_{kl}d\varepsilon_{kl}}{\frac{2}{3}\bar{\sigma}^2\left(\frac{H'}{3G}+1\right)}\sigma'_{ij}\right],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}\geqslant 0,\\
d\sigma_{ij}&=\frac{E}{1-2\nu}de\delta_{ij}+2Gd\varepsilon'_{ij}, \qquad\qquad \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}<0.
\end{aligned}\right\} \tag{12.12}
$$

这里 $de=\frac{1}{3}d\varepsilon_{ii}=\frac{1}{3}(d\varepsilon_{11}+d\varepsilon_{22}+d\varepsilon_{33})$。所以(12.9)是当已知应力增量为 $d\sigma_{ij}$ 时，确定应变增量的关系式。(12.12)是当已知应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 时，确定应力增量的关系式。

§13 理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程

現在考慮在屈服点以前一直作彈性变形，而以后在一定屈服

应力下进行塑性变形的材料。在这种材料的应力应变关系式(12.9)里，可以設

$$\lim_{d\bar{\sigma}\to 0,\ H'\to 0} \frac{3d\bar{\sigma}}{2\bar{\sigma}H'} \equiv d\lambda. \tag{13.1}$$

这里 $d\lambda$ 是正値的不定数量。应力应变关系变为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\sigma'_{ij}=0 \text{ 时，有}\\
&\qquad d\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\,d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma'_{ij}}{2G}+\sigma'_{ij}d\lambda;\\
&\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<0 \text{ 时，有}\\
&\qquad d\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\,d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma'_{ij}}{2G}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

这里 k 是常数。若用速度形状写出，則(13.2)变为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}=0 \text{ 时，有}\\
&\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\,\dot{\sigma}\delta_{ij}+\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}+\mu\sigma'_{ij};\\
&\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}<0 \text{ 时，有}\\
&\qquad \dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}\,\dot{\sigma}\delta_{ij}+\frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{2G}.
\end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

这里曾設 $\frac{d\lambda}{dt}\equiv\mu>0$。(13.2)的逆关系可求得如下：首先由(13.2)的第一式，在 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$ 且 $\sigma'_{ij}d\sigma'_{ij}=0$ 时，有

$$d\varepsilon'_{ij}=\frac{d\sigma'_{ij}}{2G}+\sigma'_{ij}d\lambda, \tag{13.4}$$

两侧乘以 σ'_{ij} 并作总和，則得

$$\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}=2k^2d\lambda. \tag{13.5}$$

于是驗証了 $d\lambda>0$ 是对应于 $\sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}>0$ 的。作了这些准备就可以解出(13.2)，得

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}>0 \text{ 时，}\\ \quad d\sigma_{ij}=\dfrac{E}{1-2\nu}\,de\delta_{ij}+2G\left\{d\varepsilon'_{ij}-\dfrac{\sigma'_{kl}d\varepsilon_{kl}}{2k^2}\sigma'_{ij}\right\};\\ \text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}d\varepsilon_{ij}<0 \text{ 时，}\\ \quad d\sigma_{ij}=\dfrac{E}{1-2\nu}\,de\delta_{ij}+2Gd\varepsilon'_{ij}.\end{array}\right\} \quad (13.6)$$

(13.2)和(13.6)是理想塑性材料的 Prandtl-Reuss 方程。

对于理想塑性材料，已知应力增量时应变增量不能完全决定，而已知应变增量时应力增量却可以唯一地决定。这个道理对于这种材料在屈服时作簡单拉伸的情形是容易理解的。

§14 Saint Venant-Levy-Mises 方程

Saint Venant-Levy-Mises 方程，是在前节导出的各式里将彈性应变增量看成比塑性应变增量小得多而略去后得到的。也就是在彈性阶段，考虑 $E\to\infty$，$G\to\infty$ 的那样的材料。这样的材料叫作剛塑性材料，在屈服点以前它是剛体。

对于理想剛塑性材料的应力应变关系式，利用(13.3)可以立即求出如下：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}=0 \text{ 时，} \dot{\varepsilon}_{ij}=\mu\sigma'_{ij};\\ \text{当 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}<2k^2 \text{ 或 } \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2 \text{ 且 } \sigma'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij}<0 \text{ 时，} \dot{\varepsilon}_{ij}=0.\end{array}\right\} \quad (14.1)$$

将(14.1)第一式的两边平方后再对 i, j 作总和时，由于 $\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}=\mu^2\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2\mu^2$，因而得 $\mu=\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}/\sqrt{2}\,k$。从而 (14.1) 的逆关系式是

$$\sigma'_{ij}=\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}}}\dot{\varepsilon}_{ij}. \quad (14.2)$$

(14.1)及(14.2)叫作理想剛塑性材料的 Saint Venant-Levy-Mises 方程。

第4章　塑性論的变分原理

在第2章§7及§8里曾經叙述微小变位彈性論的变分原理。本章将指出在塑性論里也有类似的变分原理。

§15 强 化 材 料

我們将采用在(11.5)內設 $g=f$ 而得到的

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=h\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}df \tag{15.1}$$

当作强化材料的应力应变关系式。式中 h 及 f 都是 J_2' 及 J_3' 的正值确定函数。将 Prandtl–Reuss 方程看作 (15.1) 式的特例。这时可以将 (10.2) 和 (15.1) 等式組合起来，把应变增量写成下列式子：

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{1-2\nu}{E}d\sigma\delta_{ij}+\frac{d\sigma_{ij}'}{2G}+\alpha h\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}df. \tag{15.2}$$

假設 α 滿足如下关系：

当 $f(\sigma_{ij})=c$ 且 $df>0$ 时，$\alpha=1$；

当 $f(\sigma_{ij})<c$ 或 $f(\sigma_{ij})=c$ 且 $df\leqslant 0$ 时，$\alpha=0$。

这里的 c 和(9.4)的相同，是表示强化的最終状态的参数，其值随場所而变，且設是預先指定的。为了求(15.2)的逆关系，将它两边乘以 $\partial f/\partial \sigma_{ij}$ 并作总和，則得关系式

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\varepsilon_{ij}=\left(\frac{1}{2G}+h\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\right)df. \tag{15.3}$$

由此确定 $df>0$ 是和 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\varepsilon_{ij}>0$ 相对应的以后，再解 (15.2) 則得

$$d\sigma_{ij}=\frac{E}{1-2\nu}de\delta_{ij}+2G\left[d\varepsilon'_{ij}-\alpha\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right)}{\frac{1}{2Gh}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\right].\tag{15.4}$$

这里 α 满足如下条件：

当 $f(\sigma_{ij})=c$ 且 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}>0$ 时，有 $\alpha=1$；

当 $f(\sigma_{ij})<c$ 或 $f(\sigma_{ij})=c$ 且 $\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\leqslant 0$ 时，有 $\alpha=0$。

作为研究对象的問題，和第3章开头叙述的問題完全一样。即正确解在满足(15.2)或(15.4)等应力应变关系式外，还必須满足如下諸条件：

平衡方程： $(d\sigma_{ij})_{,j}=0$; (15.5)

协調条件： $d\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial du_i}{\partial x_j}+\frac{\partial du_j}{\partial x_i}\right]$; (15.6)

边界条件： 在 S_1 上 $d\sigma_{ij}n_j=d\bar{F}_i$; (15.7)

在 S_2 上 $du_i=d\bar{u}_i$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$. (15.8)

关于此問題有如下两个变分原理。

第一变分原理 "設满足几何边界条件(15.8)的一組变位增量为 du_i^*，由协調条件(15.6)自 du_i^* 导出的应变增量为 $d\varepsilon_{ij}^*$，那末使

$$\iiint_V dA^*dv-\iint_{S_1}d\bar{F}_i du_i^* dS\tag{15.9}$$

取极小値时，便得到正确解。这里 dA^* 是将

$$dA=\frac{3E}{2(1-2\nu)}(de)^2+G\left[d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}-\frac{\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right)^2}{\frac{1}{2Gh}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{pq}}}\right]\tag{15.10}$$

的 $d\varepsilon_{ij}$ 各代以 $d\varepsilon_{ij}^*$ 而得到的。"

第二变分原理 "設滿足平衡方程 (15.5) 及力学边界条件 (15.7) 的一組应力为 $d\sigma_{ij}^*$，那末使

$$\iiint\limits_V dB^* dv - \iint\limits_{B_s} d\sigma_{ij}^* n_j d\bar{u}_i dS \tag{15.11}$$

取极小值时，得到了正确解。这里 dB^* 是将

$$dB = \frac{3(1-2\nu)}{2E}(d\sigma)^2 + \frac{d\sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}}{4G} + \frac{1}{2}\alpha h (df)^2 \tag{15.12}$$

的 $d\sigma_{ij}$ 各代以 $d\sigma_{ij}^*$ 而得到的。"

这两个变分原理的証明，可以参閱书末文献[9] 的 63～64 頁（日譯本 62～63 頁）。

§16 理想塑性材料

在(15.2)内設 $h=1/\beta$ (β 是常数)，且

$$\lim_{\beta\to 0,\, df\to 0} \frac{df}{\beta} = d\lambda \quad (d\lambda \text{ 是正值不定量})$$

时，就得到理想塑性材料的应力应变关系式，即

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma\delta_{ij} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \alpha \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda. \tag{16.1}$$

这里設

$f(\sigma_{ij})=c$（常数）且 $df=0$ 时有 $\alpha=1$；

$f(\sigma_{ij})<c$ 或 $f(\sigma_{ij})=c$ 且 $df<0$ 时有 $\alpha=0$。

为了求(16.1)的逆关系式，首先确定

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \tag{16.2}$$

成立，且 $d\lambda>0$ 是对应于 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\varepsilon_{ij}>0$ 的，然后解(16.1)就得到

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1-2\nu} de\delta_{ij} + 2G\left[de'_{ij} - \alpha \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\varepsilon_{kl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right]. \tag{16.3}$$

这里

$$当 f(\sigma_{ij})=c \text{ (常数) 且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\varepsilon_{kl}>0 \text{ 时有 } \alpha=1;$$

$$当 f(\sigma_{ij})<c \text{ 或 } f(\sigma_{ij})=c \text{ 且 } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\varepsilon_{kl}\leqslant 0 \text{ 时有 } \alpha=0.$$

对于具有应力应变关系(16.1)或(16.3)的理想塑性材料，也有和§15同样的两个变分原理。除去应力应变关系式以外的其他条件，卽(15.5)，(15.6)，(15.7)，(15.8)都和§15完全同样，变分原理的表述也和§15完全同样，只是在理想塑性材料的情形 dA 不是(15.10)，而是

$$dA=\frac{3E}{2(1-2\nu)}(de)^2+G\left[d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}-\frac{\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}d\varepsilon_{kl}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}}\right], \quad (16.4)$$

且 dB 不是(15.12)而是

$$dB=\frac{3(1-2\nu)}{2E}(d\sigma)^2+\frac{d\sigma'_{ij}d\sigma'_{ij}}{4G}. \quad (16.5)$$

关于理想塑性材料的变分原理的証明，可参閱书末文献[9]的63～64頁(日譯本62～63頁)。

§17 理想刚塑性材料

本节將叙述具有第3章§14所处理的应力应变关系的理想刚塑性材料在全区域塑性状态时的变分原理。此时的問題乃由以下諸条件所决定：

平衡方程： $\sigma_{ij,j}=0;$ (17.1)

应力应变关系： $\dot{\varepsilon}_{ij}=\mu\sigma'_{ij},$ (17.2)

或 $\sigma'_{ij}=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}}}\dot{\varepsilon}_{ij};$ (17.2')

协調条件： $\dot{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}\right];$ (17.3)

边界条件： 在 S_1 上 $F_i \equiv \sigma_{ij}n_j = \bar{F}_i$; (17.4)

在 S_2 上 $\dot{u}_i = \bar{\dot{u}}_i (i, j=1, 2, 3)$. (17.5)

由(17.2)显然可以看出刚塑性材料是不可压缩的，即

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = 0.$$

第一变分篇理 "設满足几何边界条件(17.5)的一組变位速度为 $\dot{u}_i^*$，利用协调条件(17.3)自 $\dot{u}_i^*$ 导出的应变速度分量为 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$，且 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 满足不可压缩条件 $\dot{\varepsilon}_{ii}^* = 0$，那末使

$$\Phi^* \equiv \sqrt{2}k\iiint_V \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*}dv - \iint_{S_1} \bar{F}_i\dot{u}_i^* dS \tag{17.6}$$

取极小值时，就得到了正确解。这个原理叫作 Markoff 原理。"

篇明 設正确解的应变速度及变位速度各为 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 及 $\dot{u}_i$，且将正确解的 Φ^* 写成 Φ。首先改写 Schwarz 不等式

$$\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \geqslant \dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}$$

成如下形状：

$$\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*} - \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \geqslant \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}. \tag{17.7}$$

另一方面，因为有

$$\Phi^* - \Phi = \sqrt{2}k\iiint(\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^*} - \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}})dv - \iint_{S_1}\bar{F}_i(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS$$

$$\geqslant \sqrt{2}k\iiint\frac{\dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij})}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}dv - \iint_{S_1}\bar{F}_i(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS \quad [\text{由}(17.7)]$$

$$= \iiint\sigma'_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij})dv - \iint_{S_1}\bar{F}_i(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS \quad [\text{由}(17.2')]$$

$$= \iiint\sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij})dv - \iint_{S_1}\bar{F}_i(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS \quad [\because \dot{\varepsilon}_{ii}^* = \dot{\varepsilon}_{ii} = 0]$$

$$= -\iiint_V\sigma_{ij,j}(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dv + \iint_{S_1}(\sigma_{ij}n_j - \bar{F}_i)(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS$$

$$+ \iint_{S_2}\sigma_{ij}n_j(\dot{u}_i^* - \dot{u}_i)dS \quad [\text{Green 定理}]$$

$$= 0.$$

所以必有 $\Phi^* \geqslant \Phi$。

在讲第二变分原理之前，先証明下列引理：

引理　設有满足平衡方程的两組应力 σ_{ij}^* 及 σ_{ij}，若 $\sigma_{ij}^{*\prime} = \sigma_{ij}'$ 时，必有 $\sigma^* - \sigma =$ 常数。

証明很简单，因为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^{*\prime} + \sigma^*\delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij,j}^* = 0, \quad \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}^{*\prime}.$$

所以有 $(\sigma - \sigma^*)_{,i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$，于是 $\sigma^* - \sigma =$ 常数。

若选取 σ_{ij}^* 及 σ_{ij}，使它們在 S_1 上满足 $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{ij}^* n_j = F_i$ 时，就可以証明在 S_1 上有 $\sigma = \sigma^*$，所以只要是在 $S_1 \neq 0$ 的范籌內，就必有 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^*$。作了这些准备，就可以开始叙述第二变分原理如下。

第二变分原理　“設满足平衡方程 (17.1) 和屈服条件 $\sigma_{ij}^{*\prime}\sigma_{ij}^{*\prime} = 2k^2$ 以及在 S_1 上的力学边界条件(17.4)的一組应力为 σ_{ij}^*，那末使

$$\iint_{S_2} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \tag{17.8}$$

取最大値时就得到了正确解。即已知 $\bar{u}_i$ 时真实的表面力所作的功都比其他任何比較解的表面力所作的功为大。这个原理叫作 Hill 的最大塑性功原理。”

証明　設正确解的应力和应变速度及变位速度各为 σ_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，$\dot{u}_i$ 时，则

$$\iint_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i dS - \iint_{S_2} \sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS$$

$$= \iint_{S_2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \bar{u}_i dS$$

$$= \iint_{S_1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \dot{u}_i dS + \iint_{S_2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) n_j \bar{u}_i dS$$

[∵ 在 S_1 上 $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{ij}^* n_j$]

$$=\iiint(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{*})\dot{\varepsilon}_{ij}dv \qquad [\text{由 Green 定理及 } \sigma_{ij,j}=\sigma_{ij,j}^{*}=0]$$

$$=\iiint(\sigma_{ij}'-\sigma_{ij}^{*\prime})\dot{\varepsilon}_{ij}dv \qquad [\because \dot{\varepsilon}_{ii}=0]$$

$$=\iiint\mu(\sigma_{ij}'-\sigma_{ij}^{*\prime})\sigma_{ij}'dv. \qquad [\text{由}(17.2)] \quad (17.9)$$

而 $\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'=2k^2$，又由 Schwarz 不等式有

$$\sigma_{ij}'\sigma_{ij}^{*\prime}\leqslant\sqrt{\sigma_{ij}'\sigma_{ij}'}\sqrt{\sigma_{ij}^{*\prime}\sigma_{ij}^{*\prime}}=\sqrt{2}k\cdot\sqrt{2}k,$$

所以

$$(\sigma_{ij}'-\sigma_{ij}^{*\prime})\sigma_{ij}'\geqslant0. \qquad (17.10)$$

而且仅当 $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}^{*\prime}$ 时，(17.10) 的等号才能成立。然而由上述引理可知，只要 $S_1\neq0$，由 $\sigma_{ij}'=\sigma_{ij}^{*\prime}$ 就可以得到 $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{*}$，所以由 (17.9) 及 (17.10) 可知第二变分原理必成立。当 $S_1=0$ 即全边界条件由 $\bar{u}_i$ 确定时，那末 (17.8) 的后面一半就必须改为"……取最大值时就得到了正确解或得到了和正确解仅差一个各向相等应力的应力系統……"才可以。这一点由于材料的不可压缩性很容易理解。

第5章　平面塑性应变問題

§18 平面塑性应变問題的基本方程

本章将处理理想剛塑性材料的平面应变問題。在平面应变問題里，适当选取坐标轴 x, y, z 时，就可以使塑性流动完全发生在平行于 xy 平面的平面上，而和 z 无关。于是应力分量仅有 σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，平衡方程变为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\\&\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0.\end{aligned}\right\}\tag{18.1}$$

最后一式只是指出 σ_z 和 z 无关，以后可以不予以考虑。理想剛塑性材料的应力应变关系由(14.1)得到

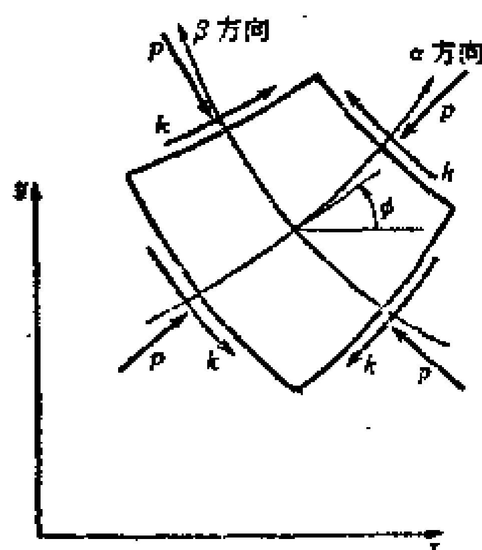


图 18.1　滑移綫

$$\frac{\dot{e}_x}{\sigma'_x}=\frac{\dot{e}_y}{\sigma'_y}=\frac{\dot{e}_z}{\sigma'_z}=\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2\tau_{xy}}.\tag{18.2}$$

因为是平面应变問題，所以有 $\dot{e}_z=0$，于是由(18.2)必有 $\sigma'_z=0$，即

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y),\tag{18.3}$$

那末屈服条件变为

$$\frac{1}{4}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2=k^2,\tag{18.4}$$

即在屈服域里的最大剪切应力为 k. 如图 18.1，設最大剪切应力方向和

x 軸間的夹角是 φ，則由方程

$$\frac{dy}{dx}=\tan\phi, \quad \frac{dy}{dx}=-\cot\phi \tag{18.5}$$

所决定的曲綫叫作是大剪切应力綫或滑移綫。由(18.5)的第一式所定的方向叫作 α 方向，第二式所定的是 β 方向。显然可以由圖推知，k 的正方向和 α, β 坐标間的关系，恰好和 τ_{xy} 的正方向和 x, y 坐标間的关系一样。若命 $p=-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$，則由图 18.2 的 Mohr 圖得出下列关系：

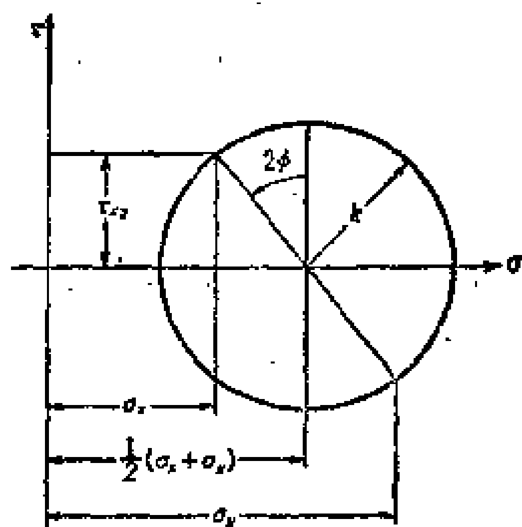


图 18.2 Mohr 圓

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-p-k\sin 2\phi,\\ \sigma_y&=-p+k\sin 2\phi,\\ \tau_{xy}&=k\cos 2\phi.\end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

将(18.6)代入到(18.1)里，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x}+2k\left(\cos 2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}+\sin 2\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0,\\ \frac{\partial p}{\partial y}+2k\left(\sin 2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}-\cos 2\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=0.\end{aligned}\right\} \tag{18.7}$$

利用附录 II 的理論，則(18.7)的特征曲綫方向由 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix}-dy & -2k\cos 2\phi\, dy+2k\sin 2\phi\, dx\\ dx & -2k\sin 2\phi\, dy-2k\cos 2\phi\, dx\end{vmatrix}=0 \tag{18.8}$$

可知必为

$$\frac{dy}{dx}=\tan\phi, \quad \frac{dy}{dx}=-\cot\phi. \tag{18.9}$$

即(18.7)的特征曲綫方向和滑移綫的方向相重。

其次，由条件 $V=0$，即

$$\begin{vmatrix} -dy & -dp-2k\cos 2\phi\, d\phi \\ dx & -2k\sin 2\phi\, d\phi \end{vmatrix}=0 \tag{18.10}$$

得

$$dp(2k\sin 2\phi)d\phi+dx(dp+2k\cos 2\phi\, d\phi)=0. \tag{18.11}$$

因为在 α 方向有 $\dfrac{dp}{dx}=\tan\phi$，所以由 (18.11) 得 $d(p+2k\phi)=0$；又在 β 方向有 $\dfrac{dy}{dx}=-\cot\phi$，所以由 (18.11) 得 $d(p-2k\phi)=0$。于是由 $V=0$ 得到如下結論：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{沿着 } \alpha \text{ 曲綫有} & p+2k\phi=\text{常数}, \\ \text{沿着 } \beta \text{ 曲綫有} & p-2k\phi=\text{常数}。 \end{array}\right\} \tag{18.12}$$

若設在所考虑的点 (x, y) 上，物体元素的变位速度的 x 軸方向和 y 軸方向的分量各为 v_x 及 v_y，則有

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial v_x}{\partial x},\quad \dot{\varepsilon}_y=\frac{\partial v_y}{\partial y},\quad \dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}, \tag{18.13}$$

所以(18.2)变成

$$\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}}{\dfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}=\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial y}}{-\dfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)}=\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}+\dfrac{\partial v_y}{\partial x}}{2\tau_{xy}}. \tag{18.14}$$

由此得到

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}-a\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)=0. \tag{18.15}$$

其中 $a\equiv\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=-\cot 2\phi$。对于 (18.15) 使用特征曲綫論的方法，則 $D=0$ 变成

$$\begin{vmatrix} -dp & dx \\ ady+dx & -dp+adx \end{vmatrix}=0. \tag{18.16}$$

将此式变形后得到

$$\frac{dy}{dx}=\tan\phi,\quad \frac{dy}{dx}=-\cot\phi, \tag{18.17}$$

亦卽，关于 v_x 及 v_y 的特征曲綫也和滑移綫相重。而 $V=0$ 是

$$\begin{vmatrix} -dy & -dv_x \\ ady+dx & adv_x-dv_y \end{vmatrix}=0, \tag{18.18}$$

将它加以变化，得到

$$dv_y\frac{dy}{dx}+dv_x=0. \tag{18.19}$$

今后，但只限于本章，将所考虑的点的变位速度在 α, β 曲綫方向的分量命为 u, v 时，则得

$$v_x=u\cos\phi-v\sin\phi,$$
$$v_y=u\sin\phi+v\cos\phi.$$

由这二式及(18.9)，(18.17)得到下列結果：

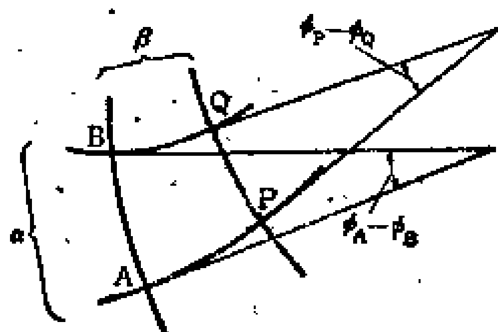


图 18.3 Hencky 第一定理

$$\left.\begin{aligned} &\text{沿着 }\alpha\text{ 曲綫有} \quad du-v\,d\phi=0, \\ &\text{沿着 }\beta\text{ 曲綫有} \quad dv+u\,d\phi=0. \end{aligned}\right\} \tag{18.20}$$

这里将提出关于滑移綫場的 Hencky 定理。考虑两条 α 曲綫 AP 及 BQ 和两条 β 曲綫 AB 及 PQ 所包圍的曲綫四边形 $ABQP$。由(18.12)有

$$p_Q-p_A=(p_Q-p_B)+(p_B-p_A)=2k(2\phi_B-\phi_Q-\phi_A),$$
$$p_Q-p_A=(p_Q-p_P)+(p_P-p_A)=2k(\phi_Q+\phi_A-2\phi_P),$$

所以必有

$$\phi_Q-\phi_P=\phi_B-\phi_A. \tag{18.21}$$

这便是所謂 Hencky 第一定理。

若命 α 曲綫和 β 曲綫的曲率半徑各为 R 及 S，那末就可以用下列关系将它們定义，但必须注意 R 及 S 的正負号(图 18.4)：

$$\left.\begin{aligned} &\alpha\text{ 曲綫:} \quad \frac{1}{R}=\frac{\partial\phi}{\partial s_\alpha}, \\ &\beta\text{ 曲綫:} \quad \frac{1}{S}=-\frac{\partial\phi}{\partial s_\beta} \end{aligned}\right\}. \tag{18.22}$$

由几何关系及 Hencky 第一定理，得

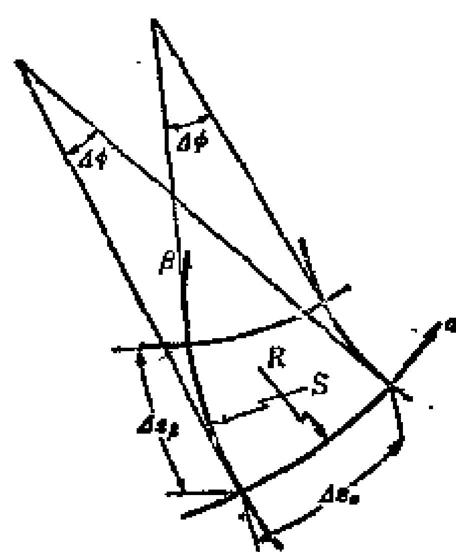


图 18.4　R，S 正方向的定义及 Hencky 第二定理

$$R\Delta\phi=\Delta s_\alpha,$$

$$\left[R+\frac{\partial R}{\partial s_\beta}\Delta s_\beta\right]\Delta\phi=\Delta s_\alpha-\Delta s_\beta\cdot\Delta\phi,$$

所以必有 $\partial R/\partial s_\beta=-1$，同理可得

$$\frac{\partial R}{\partial s_\beta}=-1,\quad \frac{\partial S}{\partial s_\alpha}=-1. \qquad (18.23)$$

把(18.22)和(18.23)組合起来，得到

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿}\ \alpha\ \text{曲綫有}\ dS+R\,d\phi=0,\\&\text{沿}\ \beta\ \text{曲綫有}\ dR-S\,d\phi=0.\end{aligned}\right\}\qquad(18.24)$$

这便是 Hencky 第二定理。

上面已将平面塑性应变問題的基本公式求出。利用这些結果便可以用数值計算法得出滑移綫場（参閱书末文献[9]的140～151頁；日譯本138～150頁）。今因篇幅所限，不討論数值算法，仅說明平面应变問題的解析的积分方法。

§19　平面塑性应变問題方程的解析积分法

以前只是用到 α 曲綫和 β 曲綫的名称，至于它們的参数的大小却未曾指定。今后将按照图 19.1，选取那样的 α 曲綫 OA 和 β 曲綫 OB 作为直交曲綫坐标的基綫，借此决定点 P 的坐标 (α,β)。但 ϕ 的正值規定为自 O 所作的切綫 Ox 循反时針方向测量所得的值，于是 α 是經过 P 的 β 曲綫数 OA 上的点 A 的 ϕ 值，β 是經过 P 的 α 曲綫交截 OB 上的点 B 的 ϕ 值。

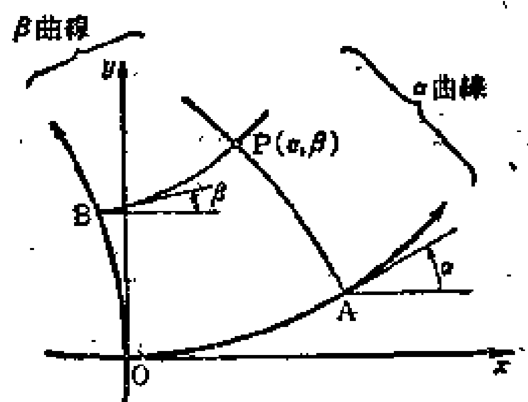


图 19.1　α，β 的定义

从而α沿着β曲綫保持定值，β沿着α曲綫也保持定值。按照 Hencky 第一定理有 $\phi_P=a+\beta$，但沿着α曲綫有 $d\phi=d\alpha$，沿着β曲綫有 $d\phi=d\beta$，所以(18.20)及(18.24)变为

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}-v=0,\ \frac{\partial v}{\partial \beta}+u=0, \tag{18.20'}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha}+R=0,\ \frac{\partial R}{\partial \beta}-S=0. \tag{18.24'}$$

可知u, v, R, S都满足同一个微分方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}+f=0. \tag{19.1}$$

这便是所謂电信方程，可用 Riemann 方法求出它的积分。若仅将結果写出来，則得如下形式(参閱书末文献 [9] 的151～157頁；日譯本150～156頁)。

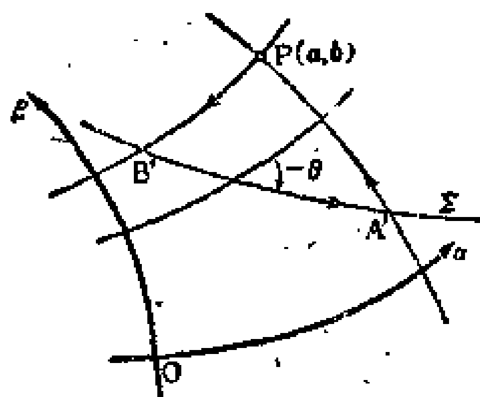


图 19.2 在Σ上給出f及$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

(1) 在不是滑移曲綫的曲綫Σ上給出f及$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$时(参看图19.2)，有

$$f_P=\frac{1}{2}(f_{A'}+f_{B'})+\frac{1}{2}\int_\Sigma\left\{\left(G\frac{\partial f}{\partial \alpha}-f\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right)d\alpha+\left(f\frac{\partial G}{\partial \beta}-G\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)d\beta\right\}. \tag{19.2}$$

这里$G(a,b,\alpha,\beta)\equiv J_0\{2\sqrt{(a-\alpha)(b-\beta)}\}$，但$J_0$表示零阶 Bessel 函数。若将$\frac{\partial f}{\partial \beta}$用$\Sigma$方向的微分$\frac{\partial}{\partial s}$表示出来时，则可由关系式

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\cos\theta}{R}\frac{\partial f}{\partial \alpha}-\frac{\sin\theta}{S}\frac{\partial f}{\partial \beta}$$

求出。这里θ是α曲綫和曲綫Σ的切綫夹角，且自α到Σ沿着反时針的方向量取的。

(2) 在二相交滑移綫上确定 f 时(看图 19.3),有

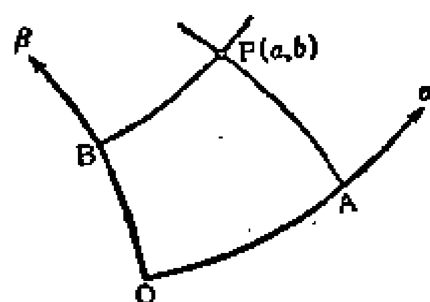


图 19.3 在相交滑移綫 OA, OB 上确定 f

$$f(a,\ b)=J_0\{2\sqrt{ab}\}f(0,\ 0)+\int_0^a J_0\{2\sqrt{(a-\alpha)b}\}\frac{\partial f}{\partial\alpha}d\alpha+\int_0^b J_0\{2\sqrt{a(b-\beta)}\}\frac{\partial f}{\partial\beta}d\beta. \qquad (19.3)$$

在图 19.4 里表示出由半徑为 r 的两个圓弧构成的滑移綫 OA 及 OB 所确定的滑移場,可以由(19.3)計算出来。例如計算 $R(a,\ b)$ 时,在 OA 上的 R 等于 $-r$,OB 上的 S 也等于 $-r$。若注意到在 OB 上有

$$R=-r(1+\beta),$$

和在全区域內 α 是負的而 β 是正的,于是由(18.24′)便得到

$$\left|\frac{R(a,\ b)}{r}\right|=I_0\{2\sqrt{|ab|}\}+\sqrt{|b/a|}I_1\{2\sqrt{|ab|}\}. \qquad (19.4)$$

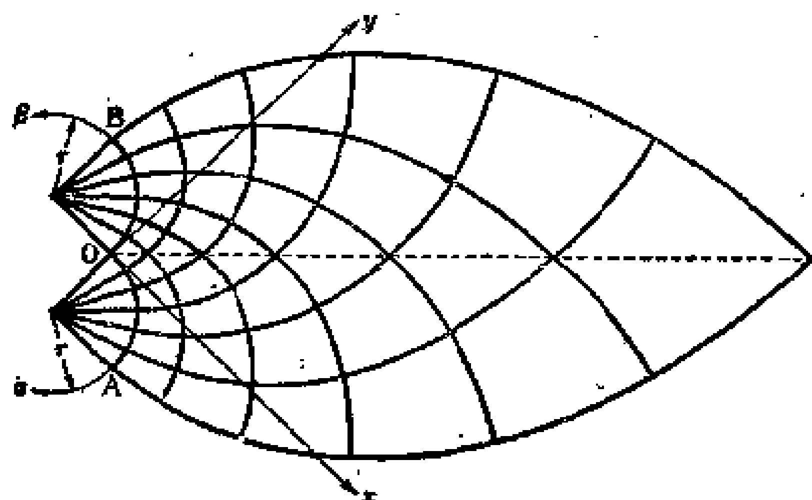


图 19.4 半徑为 r 的圓弧构成的滑移綫 OA 及 OB 所确定的滑移場

§20 平滑剛模抽拉薄板

通过具有傾角 2α 的直綫剛壁和沒有摩擦力的平滑剛模而抽

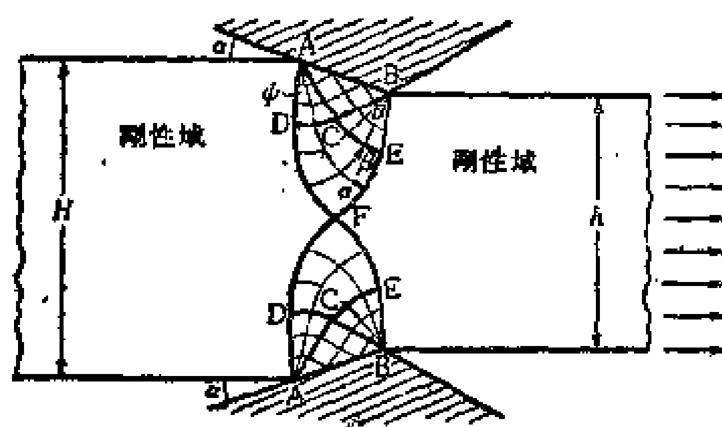


图 20.1 平滑剛模薄板的抽拉

拉薄板时，設厚为 H 的薄板变到厚为 h 的薄板。此时的滑移綫場可利用上述理論求得，其結果如图 20.1，即薄板通过 $ADFEB$ 区域时受到塑性加工。若求得滑移綫場时，就可用它計算出抽拉力，其詳細步驟見书末文献[9]的 163～178 頁；日譯本 162～177 頁。

第6章 极限分析

§21 安全系数

本章所处理的材料都是滿足应力应变关系(12.9)的理想塑性的 Prandtl–Reuss 材料。这种材料制成的結构在表面部分 S_1 上所受的外荷載命为 $F_i=\overline{F}_i(i=1, 2, 3)$，$\overline{F}_i$ 叫作基准荷載。其命表面部分 S_2 上的边界条件命为变位 $u_i=0(i=1, 2, 3)$。滿足这种边界条件的构件的应力通常不易計算，因此需要改換另一种角度来將問題提出来，卽是考虑当所受的荷載为基准荷載的多少倍时，該构件才发生破坏現象。

假設外荷載和 $\overline{F}_i$ 按比例自零逐漸增加，这样加載叫作比例加載。若命 C 是单調增加的参数，則外荷載就按 $C\overline{F}_i(i=1, 2, 3)$ 而增加。在 C 的微小范圍里，卽在低荷載的情形下，构件具有彈性状态，但当 C 达到一定値时，构件內的某一个点开始达到屈服应力。C 的值更加大时，构件內的塑性域也逐漸扩大，但在短暫的时間里，这些塑性域被彈性区域包圍着，并不引起塑性流动。当継續增加 C 的値时，塑性域继續扩大，当 C 的値等于 S 时，亦卽外荷載达到 $S\overline{F}_i$ 时，就开始有了連續的塑性流动，亦卽对于这样的外荷載，构件漸次变形，已經不能承受大于 $S\overline{F}_i$ 的外荷載了。这种荷載叫作破坏荷載。破坏荷載和基准荷載的比 S 就叫作安全系数。

极限分析的目的就是求安全系数。实际上理想塑性的 Prandtl–Reuss 材料在靜荷載下发生破坏时，就认为經历了上述的过程。所以可以将 S 看作是一个表示由基准荷載到破坏間有

多大的安全余地的数。

本章将叙述确定安全系数 S 的上下界的两个定理，但因篇幅限制仅处理平面应变問題，而略去証明。其詳情見书末文献[11]、[12]和它們里边所引用的文献。

§ 22 平面应变問題的极限分析的定理

在平面应变問題里，适当地选取坐标軸 x, y, z 时，可以使垂直于 z 軸的断面及边界条件都和 z 无关，这样就可以将它看作垂直于 z 軸的任意断面的二維問題。今設有如下边界条件：

在表面 c_1 部分

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha=F_x,\\ \tau_{xy}\cos\alpha+\sigma_y\sin\alpha=F_y.\end{aligned}\right\}\tag{22.1}$$

在表面 c_2 部分

$$u=0,\quad v=0.\tag{22.2}$$

这里(22.1)左側的 α 是边界上外向法綫和 x 軸的夹角，而且是自 x 軸到法綫循着反时針方向测得的。(22.2) 的 u, v 是变位。先定义下面的名詞。

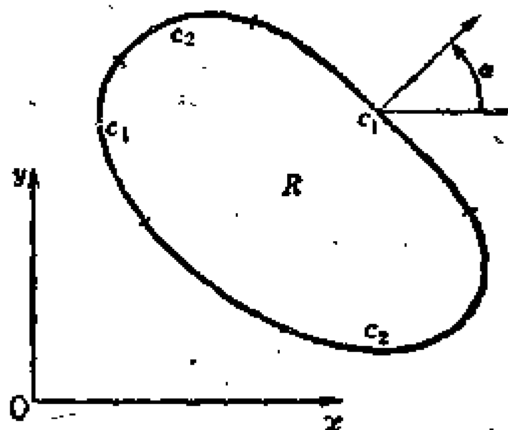


图 22.1 xy 断面

設有一組应力 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$，且在物体所在的区域 R 的若干部分区域 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 里，$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ 和它們对于 x, y 的一阶导数都是連續的，且在各部分区域里都满足

(1) 平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0.\tag{22.3}$$

但在任意两个部分区域的边沿上，应力是否連續那是沒有关系的。假設通过边沿而作用的內力，其垂直分量 N 及切分量 T 也都是連續的，即在图 22.2 里，通过界綫 L_{hk}，R_k 作用到 R_h 的內力命为

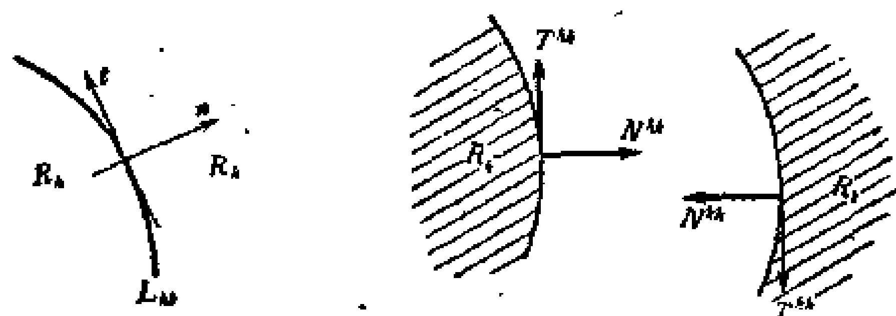


图 22.2　部分区域边界图(1)

N^{hk} 及 T^{hk}，而 R_h 作用到 R_k 的是 N^{kh} 及 T^{kh} 时，则必有

$$N^{hk}=N^{kh},\quad T^{hk}=T^{kh}.$$

这个条件是作用和反作用原理的必然要求。这样的 $(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})$ 如果还滿足

(2) c_1 上的力学边界条件(22.1)及

(3) 屈服条件

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2\leqslant 4k^2, \tag{22.4}$$

那末这組应力 $(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})$ 对于边界条件 (22.1) 叫作靜定可許应力組。在承受破坏荷載的构件內，应力除以安全系数而得的应力是靜定可許的。

不用 (22.1)，而取

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\sin\alpha=m_s\overline{F}_x,\\ \tau_{xy}\cos\alpha+\sigma_y\sin\alpha=m_s\overline{F}_y,\end{aligned}\right\} \tag{22.5}$$

且滿足(22.5)，(22.3)及(22.4)的 $(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})$ 至少有一組存在时，则 $m_s\geqslant 1$ 叫作靜定可許系数。

其次，設有一組变位速度 $(v_x,\ v_y)$，它們在各部分区域里連同它們对于 x,y 的一阶导数都是連續的，而且滿足(1)不可压縮条件

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \qquad (22.6)$$

及(2)几何边界条件

$$\text{在 } c_2 \text{ 上}\quad v_x=0,\quad v_y=0 \qquad (22.7)$$

和(3)条件

$$\int_{c_1}(F_x v_x+F_y v_y)ds>0, \qquad (22.8)$$

那末如图 22.3，在界綫 L_{hk} 上的垂直分量 v_N 必相等(即 $v_N^{(h)}=v_N^{(k)}$)，但切分量却不必相等(即不必有 $v_T^{(h)}=v_T^{(k)}$)。更說即使此时引起滑移，上述条件也成立，那末满足以上各条件的 (v_x, v_y) 就叫作运动学上可許的。承受破坏荷載时的速度場是运动学上可許的。运动学上可許的系数 m_k 定义如下：

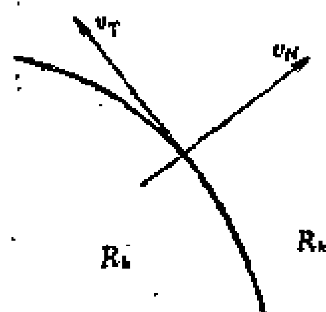


图 22.3 部分区域边界图(2)

$$m_k=k\frac{\left[\iint_R \dot{\Gamma}\,dx\,dy+\sum\int_{L_{hk}}\left|v_T^{(k)}-v_T^{(h)}\right|dl_{hk}\right]}{\int_{c_1}(F_x v_x+F_y v_y)\,ds}. \qquad (22.9)$$

这里

$$\dot{\Gamma}=\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (22.10)$$

乃利用 $\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}$，$\dot{\varepsilon}_y=\frac{\partial v_y}{\partial y}$，$\dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}$ 将最大剪切应变速度 $[(\dot{\varepsilon}_x-\dot{\varepsilon}_y)^2+\dot{\gamma}_{xy}^2]^{\frac{1}{2}}$ 用 v_x，v_y 表示而得到的式子。积分 $\iint_R(\quad)dx\,dy$ 乃表示对物体全区域所作的积分，$\sum\int_{L_{hk}}|\quad|dl_{hk}$ 則表示沿着不連續綫所作的积分之和。于是得到下列关系

$$m_s\leqslant S\leqslant m_k. \qquad (22.11)$$

(22.11) 是极限分析里的基本不等式，它給出安全系数 S 的上下界。証明太长只好从略。欲知其詳者可参閱书末文献[11]的 213~222 頁。下一节我們介紹一个簡单的例題。

§23 具有圓孔的正方形管的安全系数[13]

設有一个正方形管，它的中央是半徑为 a 的圓孔，而外边是边长为 $2b$ 的正方形，承受的內压为 p（基准荷載）。我們求它的安全系数（图 23.1）。这时，边界条件都是力学边界条件。

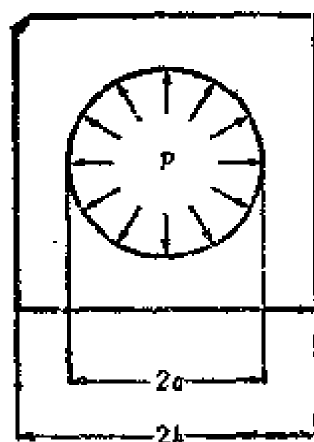


图 23.1 具有圓孔的正方形管

在求靜定可許应力时，利用外直徑为 $2b$ 內直徑为 $2a$ 的圓管，假設它受有外压 0 及內压 p^*，而且設全部都处于塑性状态（图 23.2）。卽內压为 p^*，在圓管部分有 $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2$，正方形和虛綫所画的圓間的部分的应力为 0，而且采用对应于外压 0 的应力作为靜定可許应力（图 23.3）。这个虛綫圓就

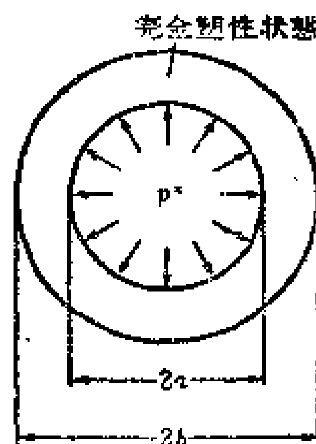


图 23.2 內压 p^* 且全部处于塑性状态的圓管

$$p^*=2k\log\frac{b}{a}$$

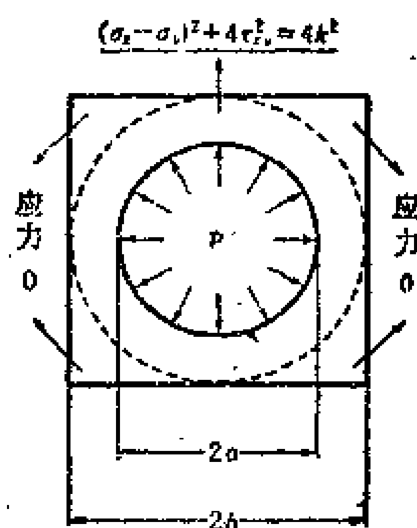


图 23.3 靜定可許应力

是表示前面所說的应力不連續面。

内半徑是 a 外半徑是 b 的圓管到处都处在塑性状态，即在 $(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2$ 的情形下，内压 p^* 等于[11]

$$p^*=2k\log\frac{b}{a}, \tag{23.1}$$

所以靜定可許系数 m_s 为

$$m_s=\frac{p^*}{p}=\frac{2k}{p}\log\frac{b}{a}. \tag{23.2}$$

其次，为了計算 m_k，选取❶

$$v_x=\frac{cx}{x^2+y^2}, \quad v_y=\frac{cy}{x^2+y^2}. \tag{23.3}$$

由(23.3)所确定的速度場設有不連續面。这时应变速度是

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{c(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=-\dot{\varepsilon}_y, \quad \dot{\gamma}_{xy}=\frac{4cxy}{(x^2+y^2)^2}, \tag{23.4}$$

易知它必然滿足条件(22.6)。因为問題里沒有 c_2 部分，故无須考慮条件 (22.7)。当适当地选取参数 c 的符号时，則可以使它滿足条件(22.8)。利用(22.10)作計算，得 $\Gamma=\frac{2c}{r^2}$，所以由 (22.9) 得出

$$m_k=\frac{2k\iint\limits_R\frac{1}{r^2}dx\,dy}{p\int\frac{1}{a}ds}=\frac{2k}{p}\left[\log\frac{b}{a}+0.110\right]. \tag{23.5}$$

由(23.2)及(23.5)得

$$\frac{2k}{p}\log\frac{b}{a}\leqslant S\leqslant\frac{2k}{p}\left[\log\frac{b}{a}+0.110\right]. \tag{23.6}$$

命 $\frac{b}{a}=1.5$，則(23.6)变为

$$0.811\left(\frac{k}{p}\right)\leqslant S\leqslant 0.921\left(\frac{k}{p}\right). \tag{23.7}$$

❶ (23.3)是二維不可压縮流体的流动的速度場。

在书末的文献 [13] 里，为了求 S 的更好的上下界，曾假定图 23.4 那样的不連續面，即設不連續面平行于 OC，且沿着 AB, ED 而发生。$AEDCB$ 在 OC 的方向上作均匀运动，其他部分是靜止的。在滑移以外的全区域里設物体是剛性的，則有 $\dot{I}=0$，且 $\sum\int_{L_{hk}}|v_T^{(h)}-v_T^{(k)}|dl_{hk}$ 是 $\overline{AB}\times 2v$，$\int_{C_1}(\overline{F}_x v_x+\overline{F}_y v_y)\,ds$ 是 $\overline{AE}\times pv$。再考虑 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,b-(\cos\delta+\sin\delta)a$，$\overline{AE}=2a\sin\delta$ 时，則有

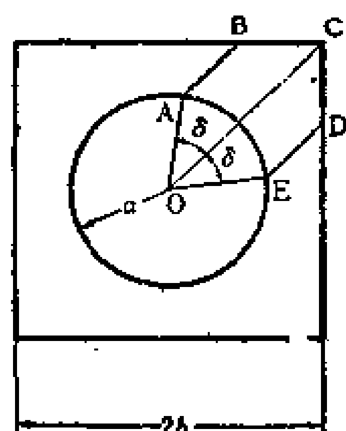


图 23.4 不連續面

$$m_k=\frac{k}{p}\,\frac{\sqrt{2}\,b-(\cos\delta+\sin\delta)a}{a\sin\delta},\tag{23.8}$$

若选取使 m_k 为最小的 δ，即 $\delta=\cos^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{2}\,b}\right)$ 时，則

$$m_k=\frac{k}{p}\left(\sqrt{2\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}-1\right).$$

再同 (23.2) 結合起来，則得 S 的上下界

$$\frac{2k}{p}\log\frac{b}{a}\leqslant S\leqslant\frac{k}{p}\left(\sqrt{2\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}-1\right).\tag{23.9}$$

若設 $\frac{b}{a}=1.5$，則 (23.9) 变成

$$0.811\left(\frac{k}{p}\right)\leqslant S\leqslant 0.871\left(\frac{k}{p}\right).\tag{23.10}$$

可以看出 (23.9) 比 (23.6) 的精确度提高了。

极限分析的方法也适用于剛架結构，用它可以解决許多求 S 的上下界的有趣問題。关于这方面的知識可以参閱书末文献[12]。

第7章　全应变塑性論

在全应变塑性論里，假設应力和应变間有一一对应的关系。当然象曾經在第3章說过的那样，应变的最終状态不仅依赖于最終应力，而且依赖于加載路綫，所以形成全应变塑性論基础的应力应变关系仅对于特别荷載才能成立[9]。因此全应变塑性論里通常含有数学的和物理学的矛盾。但因它比应变增量塑性論在运算上可以簡化得多，所以还有一些研究者喜欢采用它。本书也給它专辟一章略述大概。全应变塑性論里除了应力应变有非綫性关系外，其余都和彈性論里完全一样。

§24　应力应变关系

在全应变塑性論里，假定应力应变关系为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{pq})\quad(i,\ j,\ p,\ q=1,\ 2,\ 3),\tag{24.1}$$

又設应力应变关系在所考慮的变形过程里不能变更。从而問題可以假定仅局限于加載的情形，而不包括卸載的过程。由于这个假定，全应变塑性論和非綫性彈性論就沒有区别了。再設关系(24.1)中的 $\varepsilon_{pq}=0$ 对应着 $\sigma_{ij}=0$，亦即使零应变点对应着零应力点而选取的。若函数行列式 $\dfrac{\partial(\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \cdots)}{\partial(\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \cdots)}$ 在含有 $\varepsilon_{pq}=0$ 的区域内不为零时，則(24.1)的逆关系式可以唯一地决定，即是

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{pq})\quad(i,\ j,\ p,\ q=1,\ 2,\ 3).\tag{24.2}$$

全应变塑性論的問題由以下各条件所定义：

平衡方程：　$\sigma_{ij,j}+X_i=0;$　　(24.3)

应力应变关系：$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(\varepsilon_{pq})$.　　(24.4)

或　　　$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(\sigma_{pq})$；　　　(24.4′)

協調条件：　$\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$；　　　(24.5)

边界条件：在 S_1 上　$\sigma_{ij}n_j=\overline{F}_i$；　　　(24.6)

在 S_2 上　$u_i=\overline{u}_i$　$(i, j=1, 2, 3)$.　　　(24.7)

除应力应变关系之外，其他条件都和§6的微小变位理論的完全一样。我們將考察此时是否也有变分原理成立。

首先檢查用(24.1)或(24.2)确定应力应变关系时，应变能量函数 A 和余能函数 B 是否存在。A 的定义是

$$\delta A=\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}. \tag{24.8}$$

所以 A 存在的充要条件就是在(24.1)里必須滿足关系

$$\frac{\partial\sigma_{pq}}{\partial\varepsilon_{ij}}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{pq}}\quad(i, j, p, q=1, 2, 3). \tag{24.9}$$

若确定(24.9)已成立时，則(24.8)右側的 σ_{ij} 利用(24.1)可以表示为 ε_{pq} 的函数。再將它作积分就得到 A，于是有如下第一变分原理成立：

第一变分原理　“設滿足几何边界条件(24.7)的一組变位为 u_i，利用(24.5)由 u_i 导出的应变命为 ε_{ij} 时，那末使

$$\Pi_p=\iiint_V(A-X_iu_i)\,dv-\iint_{S_1}\overline{F}_iu_i\,ds \tag{24.10}$$

取极值，便得到正确解。”

确定 A 的存在后，則 B 由

$$B(\sigma_{pq})=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-A \tag{24.11}$$

可以得到。若在(24.2)內滿足关系

$$\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\sigma_{pq}}=\frac{\partial\varepsilon_{pq}}{\partial\sigma_{ij}}\quad(i, j, p, q=1, 2, 3) \tag{24.12}$$

时，就可以証明 B 的存在和 A 的存在无关，而且由

$$\delta B=\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} \tag{24.13}$$

可以算出。求得 B 后就有下列第二变分原理成立。

就二变分原理 "設滿足平衡方程 (24.3) 及力学边界条件 (24.6) 的一組应力为 σ_{ij}，那末使

$$\Pi_c = \iiint\limits_V B\,dv - \iint\limits_{S_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i\,dS \tag{24.14}$$

取衡値时，就得到了正确解。"

这两个变分原理都很容易証明，故从略。它們都仅指出正确解各由 Π_p 及 Π_c 的极値条件所确定。究竟 Π_p 或 Π_c 的极値是极大値还是极小値，或者两者都不是？当倘未进一步具体地指定应力应变关系式时，这是不能断定的。

§25 割切模量理論

应力应变关系假定为

$$\frac{\sigma'_x}{\varepsilon'_x} = \frac{\sigma'_y}{\varepsilon'_y} = \frac{\sigma'_z}{\varepsilon'_z} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}, \tag{25.1}$$

即

$$\sigma'_{ij} = \mu \varepsilon'_{ij} \tag{25.2}$$

的形状时，其理論就叫作割切模量理論。这里 μ 是正値比例常数，由 (25.2) 有

$$\mu \Gamma = S. \tag{25.3}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^2 &\equiv \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}, \quad \Gamma d\Gamma = \varepsilon'_{ij} d\varepsilon'_{ij}, \\ S^2 &\equiv \sigma'_{ij}\sigma'_{ij}, \quad S dS = \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij}. \end{aligned}\right\} \tag{25.4}$$

設 S 和 Γ 都是单値連續函数，且

$$S = S(\Gamma) \text{ 或 } \Gamma = \Gamma(S). \tag{25.5}$$

如图 25.1。至于象 (25.5) 形状的 S 和 Γ 的关系式可以用簡单实驗（例如簡单拉伸实驗及簡单剪切实驗）的結果給予决定。这样，应力应变关系式 (25.2) 就变

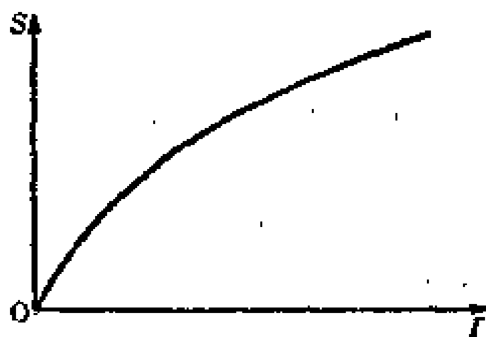


图 25.1 S-Γ 曲綫

为如下形状：

$$\sigma'_{ij}=\frac{S(\Gamma)}{\Gamma}\varepsilon'_{ij}, \tag{25.6}$$

或

$$\varepsilon'_{ij}=\frac{\Gamma(S)}{S}\sigma'_{ij}. \tag{25.7}$$

这两組方程都各含六个方程，而且都只有五个是独立的。此外再附加上条件

$$\sigma=\frac{E}{1-2\nu}e. \tag{25.8}$$

这里

$$\sigma=\frac{1}{3}\sigma_{ii}=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}),$$

$$e=\frac{1}{3}\varepsilon_{ii}=\frac{1}{3}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}).$$

(25.8)告訴我們塑性变形并不引起体积变化。

§26 Kachanoff原理

利用割切模量理論，可以算出 A, B 如下：

$$A=\int_0^\Gamma S(\Gamma)d\Gamma+\frac{3E}{2(1-2\nu)}e^2, \tag{26.1}$$

$$B=\int_0^S \Gamma(S)dS+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2. \tag{26.2}$$

当 S-Γ 曲綫具有 $\frac{S}{\Gamma}>0$, $\frac{dS}{d\Gamma}>0$ 的特性时，将(24.10)及(24.14)的 A, B 各代以(26.1)及(26.2)后所得的 Π_p 及 Π_c 对于正确解是相对极小的，亦即 Π_p 及 Π_c 的二阶变分是具有 $\delta^2\Pi_p\geqslant0$, $\delta^2\Pi_c\geqslant0$ 的特性的，这一点頗容易証明[10]。当变分原理采用割切模量理論的应力应变关系时，就叫作 Kachanoff 原理。

§27 理想塑性材料(Hencky 材料)

将割切模量理論应用于服从 Mises 屈服条件的理想塑性材料

时，就得到 Hencky 的应力应变关系式。当 $S<\sqrt{2}k$ 时，这种材料仅引起弹性变形；当 $S=\sqrt{2}k$ 时则引起塑性流动(图 27.1)。(26.1)，(26.2)的 A，B 此时变成如下形状：

$$A=\begin{cases} G\Gamma^2+\dfrac{3E}{2(1-2\nu)}e^2, & \Gamma\leqslant\Gamma_0, \\ G\Gamma_0^2+\dfrac{3E}{2(1-2\nu)}e^2+\sqrt{2}k(\Gamma-\Gamma_0), & \Gamma\geqslant\Gamma_0, \end{cases} \tag{27.1}$$

$$B=\begin{cases} \dfrac{1}{4G}S^2+\dfrac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2, & S<\sqrt{2}k, \\ \dfrac{1}{2G}k^2+\dfrac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2, & S=\sqrt{2}k. \end{cases} \tag{27.2}$$

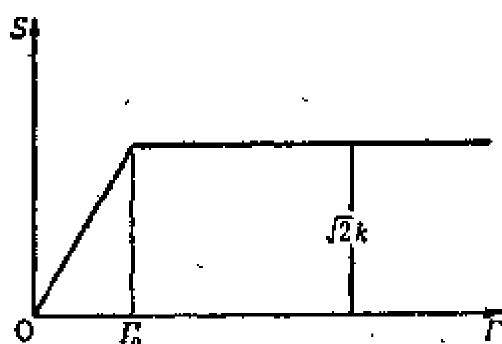


图 27.1 Hencky 材料的 S-Γ 曲線

又应力应变关系由 $\sigma_{ij}=\dfrac{\partial A}{\partial \varepsilon_{ij}}$，有

$$\sigma_{ij}=\begin{cases} 2G\,\varepsilon'_{ij}+\dfrac{E}{1-2\nu}e\delta_{ij}, & \Gamma\leqslant\Gamma_0, \\ \dfrac{\sqrt{2}k}{\Gamma}\varepsilon'_{ij}+\dfrac{E}{1-2\nu}e\delta_{ij}, & \Gamma\geqslant\Gamma_0. \end{cases} \tag{27.3}$$

逆解之，得

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases} \dfrac{1}{2G}\sigma'_{ij}+\dfrac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij}, & S<\sqrt{2}k, \\ \dfrac{1}{2G}\sigma'_{ij}+\dfrac{1-2\nu}{E}\sigma\delta_{ij}+\lambda\sigma'_{ij}, & S=\sqrt{2}k. \end{cases} \tag{27.4}$$

这里 λ 是正值不定量。此时成立的变分原理叫作

Haar-Kármán 原理 "設满足平衡方程(24.3)及 Mises 屈服条件 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\leqslant 2k^2$ 和 S_1 上的边界条件(24.6)的一組应力分量为 σ_{ij}，那末值

$$\Psi=\iiint_V\left[\frac{1}{4G}S^2+\frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma^2\right]dv-\iint_{S_2}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS \quad (27.5)$$

取极小值时就得到正确解。"

証明 設正确解的应力、应变及变位各为 σ_{ij}, ε_{ij} 及 u_i，比較解的应力是 σ^*_{ij}，且設

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^p_{ij} \quad (\varepsilon^e_{ij}\text{ 是弹性应变，}\varepsilon^p_{ij}\text{ 是塑性应变})。$$

作(27.5)的一阶变分，得

$$\delta\Psi=\iiint_V \varepsilon^e_{ij}\delta\sigma_{ij}dv-\iint_{S_2}\delta\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS. \quad (27.6)$$

将 $\varepsilon^e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon^p_{ij}$ 代入后，因为 ε_{ij} 是正确解的应变，必满足协調条件，所以用 Green 定理改写，就得

$$\begin{aligned}\delta\Psi&=\iiint_V(\varepsilon_{ij}-\varepsilon^p_{ij})\delta\sigma_{ij}dv-\iint_{S_2}\delta\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i dS\\&=-\iiint_V(\delta\sigma_{ij})_{,j}u_i\,dv+\iint_{S_1}\delta\sigma_{ij}n_ju_i\,dS\\&\quad+\iint_{S_2}\delta\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)\,dS-\iiint_{V_p}\varepsilon^p_{ij}\,\delta\sigma_{ij}\,dv\\&=-\iiint_{V_p}\varepsilon^p_{ij}\delta\sigma_{ij}\,dv.\end{aligned} \quad (27.7)$$

这里 V_p 表示該积分仅取在正确解的塑性区域里。又由应力应变关系(27.4)有

$$\varepsilon^p_{ij}=\lambda\sigma'_{ij},\quad \lambda>0, \quad (27.8)$$

所以(27.7)变成

$$\delta\Psi=-\iiint\limits_{V_p}\lambda\sigma'_{ij}\delta\sigma_{ij}dv. \tag{27.9}$$

但是 $\sigma'_{ij}\delta\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}(\sigma^*_{ij}-\sigma_{ij})=\sigma'_{ij}(\sigma^{*\prime}_{ij}-\sigma'_{ij})$,

而且由 Schwarz 不等式有

$$\sigma'_{ij}\sigma^{*\prime}_{ij}\leqslant\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}\cdot\sqrt{\sigma^{*\prime}_{ij}\sigma^{*\prime}_{ij}}.$$

我們在选取 σ'_{ij} 时,又要求能使它在 V_p 內有 $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}=2k^2$,而比較解是 $\sigma^{*\prime}_{ij}\sigma^{*\prime}_{ij}\leqslant 2k^2$ 的。将这些关系綜合起来便得到

$$\delta\Psi\geqslant 0. \tag{27.10}$$

这里 Ψ 是 σ_{ij} 的正值二次函数,它的二阶变分是正的,而且不含高于它的項,所以 Ψ 在正确解的情形下是极小的。这个証明是 Greenberg 作的[10]。Greenberg 的証明指出,这时有 $\delta\Psi\geqslant 0$,这和普通变分的 $\delta\Psi=0$ 的情形不一样,因为这里是在比較解的应力上加上了条件 $\sigma^{*\prime}_{ij}\sigma^{*\prime}_{ij}\leqslant 2k^2$ 而得来的。例如 $y=x^2$ 的最小值在 $x\geqslant 1$ 的条件下,仅当 $x=1$ 时才能实現。但在这时却有 $y'(1)\neq 0$。

§28 理想刚塑性材料

在 §27 所处理的 Hencky 材料里,E, $G\to\infty$,而且当物体全区域处于屈服状态时,应力应变关系是

$$\sigma'_{ij}=\frac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}}\varepsilon_{ij}. \tag{28.1}$$

这样的材料是不可压縮的,即 $\varepsilon_{ii}=0$。这时有下列两个变分原理成立(証明和 §17 完全一样故从略)。

第一变分原理 "設滿足几何边界条件 (24.7) 的一組变位为 u^*_i,利用协調条件 (24.5) 由 u^*_i 导出的应变命为 ε^*_{ij},且設 ε^*_{ij} 滿足不可压縮条件 $\varepsilon^*_{ii}=0$,那末使

$$\Phi^*=\sqrt{2}\,k\iiint\limits_V\sqrt{\varepsilon^*_{ij}\varepsilon^*_{ij}}dv-\iint\limits_{S_1}\overline{F}_i u^*_i dS \tag{28.2}$$

取极小值时，就得到正确解。这个原理叫做 Markoff 原理。"

第二变分原理 "設满足平衡方程(24.3)及屈服条件 $\sigma_{ij}^{*\prime}\sigma_{ij}^{*\prime}=2k^2$ 和力学边界条件(24.6)的一組应力为 σ_{ij}^*，那末使

$$\iint_{S_1}\sigma_{ij}^* n_j \bar{u}_i dS \tag{28.3}$$

取极大值时，就得到正确解。这个原理叫做 Sadowsky 原理。"

附　　录

I. Green 定理

本书里經常引用的 Green 定理是这样的:

当 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$ 时,有

$$\iiint\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv=\iint\limits_S \sigma_{ij}n_j u_i\,dS-\iiint\limits_V \sigma_{ij,j}u_i dv\,.$$

为了証明,先作下列变换:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}&=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\varepsilon_{13}+\sigma_{21}\varepsilon_{21}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}\\
&\quad+\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{32}\varepsilon_{32}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}\\
&=\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\\
&=\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&\quad+\tau_{zx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\tau_{zy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&=\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}\\
&\quad+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}\\
&\quad+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}$$

再利用关系式

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V\left[\sigma_x\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}\right]dv\\
&\quad=\iint\limits_S(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n)u\,dS-\iiint\limits_V\left[\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right]u\,dv,
\end{aligned}$$

就可以証明。

II. 特征曲綫

考虑一阶偏微分方程組：

$$\left.\begin{aligned}P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial x}+S\frac{\partial v}{\partial y}=T,\\P'\frac{\partial u}{\partial x}+Q'\frac{\partial u}{\partial y}+R'\frac{\partial v}{\partial x}+S'\frac{\partial v}{\partial y}=T'.\end{aligned}\right\}\tag{II.1}$$

这里系数 $P, Q, \cdots$ 等都是 x, y, u, v 的函数。設 $y=f(x)$ 是在 xy 平面里确定的平滑曲綫。取 x 为独立变数，而且把 u, v 沿着曲綫 $y=f(x)$ 的变化命为 $\delta u, \delta v$，那末有

$$\frac{\delta u}{\delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx},\quad \frac{\delta v}{\delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}.\tag{II.2}$$

利用(II.2)把(II.1)中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 消去，得到

$$\left.\begin{aligned}&\left(-P\frac{dy}{dx}+Q\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(-R\frac{dy}{dx}+S\right)\frac{\partial v}{\partial y}\\&\qquad=T-P\frac{\delta u}{\delta x}-R\frac{\delta v}{\delta x},\\&\left(-P'\frac{dy}{dx}+Q'\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(-R'\frac{dy}{dx}+S'\right)\frac{\partial v}{\partial y}\\&\qquad=T'-P'\frac{\delta u}{\delta x}-R'\frac{\delta v}{\delta x}.\end{aligned}\right\}\tag{II.3}$$

加以整理后，則得

$$\left.\begin{aligned}&(-Pdy+Qdx)\frac{\partial u}{\partial y}+(-Rdy+Sdx)\frac{\partial v}{\partial y}\\&\qquad=Tdx-Pdu-Rdv,\\&(-P'dy+Q'dx)\frac{\partial u}{\partial y}+(-R'dy+S'dx)\frac{\partial v}{\partial y}\\&\qquad=T'dx-P'du-R'dv.\end{aligned}\right\}\tag{II.4}$$

这里 du, dv 表示 u, v 沿着曲綫 $y=f(x)$ 的增量。把矩陣 $[M]$ 及行列式 D, V 定义如下:

$$[M]=\begin{pmatrix}-Pdy+Qdx & -Rdy+Sdx & Tdx-Pdu-Rdv\\ -P'dy+Q'dx & -R'dy+S'dx & T'dx-P'du-R'dv\end{pmatrix}, \quad \text{(II.5)}$$

$$D=\begin{vmatrix}-Pdy+Qdx & -Rdy+Sdx\\ -P'dy+Q'dx & -R'dy+S'dx\end{vmatrix}$$

$$=(PR'-P'R)(dy)^2-[(QR'-Q'R)+(PS'-P'S)](dxdy)$$

$$+(QS'-Q'S)(dx)^2, \quad \text{(II.6)}$$

$$V=\begin{vmatrix}-Pdy+Qdx & Tdx-Pdu-Rdv\\ -P'dy+Q'dx & T'dx-P'du-R'dv\end{vmatrix}. \quad \text{(II.7)}$$

$D=0$ 就叫作(II.1)的特征方程,它若有二实根时,就可以分解成

$$(dy-\Gamma_+dx)(dy-\Gamma_-dx)=0, \quad \text{(II.8)}$$

那末偏微分方程(II.1)就叫作双曲型的;分别将

$$\frac{dy}{dx}=\Gamma_+, \quad \frac{dy}{dx}=\Gamma_- \quad \text{(II.9)}$$

积分而得的曲綫叫作特征曲綫。

当方程 $D=0$ 无实根,即在实数范圍内 $D\neq 0$ 时,如果 $y=f(x)$ 确定了 u, v, 那末由 (II.4) 就可以計算出 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial y}$, 于是由 (II.2) 也可以計算出 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial v}{\partial x}$. 将 (II.1) 分别对 x, y 作导数,只要 $D\neq 0$, 就可以求得更高阶的导数,于是在 xy 平面上的 u, v 值便可以决定。

当 $D=0$, $V=0$ 时,矩陣$[M]$是一秩的。虽然由(II.4)可以求出 $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的值,但求得的值不是唯一的,即在特征曲綫上 $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的值是不連續的,于是 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ 的值也可以不連續。$D=0$ 确定了特征曲綫的方向,$V=0$ 指出 u, v 沿着特征曲綫的变化情形。

当 $D=0$, $V\neq 0$ 时解不存在,于是,当 $D=0$ 时只要有解存在,

那末就必有 $V=0$。

关于这方面的詳細理論，請參閱后面的文献[16]。

参考文献

[1] S. Timoshenko: Theory of Elasticity (McGraw-Hill, 1934), 井坂・江崎・森・共譯: 彈性体の力学(コロナ社, 1935)。

[2] 仓西正嗣: 彈性学(日本机械学会, 1948)。

[3] E. Reissner: Lecture Notes on Theoretical and Applied Elasticity, at Massachusetts Institute of Technology (1954)。

[4] 森口繁一: 彈性体の喰違ひの基础理論, 应用数学力学, 第一卷第2号 (1947), 87.

[5] R. Courant & D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik I, (Springer, 1931)。

[6] K. Washizu: "On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity" Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report 25—18 (1955)。

[7] E. Trefftz: "Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren", Proc. 2nd Int. Congr. Appl. Mech., (Zürich, 1926), 131.

[8] A. Weinstein: "New Methods for the Estimation of Torsional Rigidity" Proc. 3rd Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society (1949)。

[9] R. Hill: The Mathematical Theory of Plasticity (Oxford, 1950)。鷲津・山田・工藤・共譯: 塑性学(培风館, 1954)。

[10] H. J. Greenberg: "On the Variational Principles of Plasticity", Contract N7, ONR-358 (Brown University, 1949)。

[11] W. Prager & P. G. Hodge, Jr.: Theory of Perfectly Plastic Solids (John Wiley & Sons, 1951)。安倍・宮本・共譯: 塑性学(丸善, 1954)。

[19] 仓西正嗣: 极限設計法(オーム社, 1954)。

[13] D. C. Drucker, H. J. Greenberg and W. Prager: "The Safety Factor of an Elastic-Plastic Body in Plane Strain", Journal of Applied Mechanics, 18, No. 4 (1951, Dec.), 371.

[14] 山田嘉昭：塑性学の最近の进步，日本机械学会志，第 60 卷第 456 号 (1957 年 1 月)，9 頁。

[15] A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids (McGraw-Hill, 1950)。

[16] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen (Springer, 1952)。